Vysvetlivky:
(m) - príklad sa vyskytol na MIDTERM písomke
(f) - príklad sa vyskytol na FINAL písomke
(s) - príklad sa vyskytol na skúškovej písomke

Poznámka:
To, že je niektorý príklad označený napr. (s) neznamená, že sa nemôže vyskytnúť na Midterme alebo Finale, ak zodpovedajúce učivo bolo prebrané na cvičeniach pred danou písomkou.

OKRUH 1: Nevyhnutná geometria

1. (s) Určte množinu všetkých samodružných bodov transformácie
$$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2(2x+3y-6)}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. (s) Určte rovnice stredového premietania zo stredu $S = (0,0,0)$ do roviny $\pi \equiv \langle R, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ pre $R = (0,0,3), \mathbf{a} = (1,0,0), \mathbf{b} = (1,1,0)$ a zobrazte v ňom bod $P = (1,1,1)$. Nájdite rovnicu priemetne π a načrtnite ju. Pre obraz bodu P, bod P', nájdite súradnice v sústave priemetne π i v svetovej súradnicovej sústave priestoru $\mathbb{E}^3$.

3. (s) Zistite, aké premietanie do roviny $\pi : z = 0$ je reprezentované maticou
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 2\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
kde φ je pevné. Zobrazte jednotkový bod osi z, nájdite určujúce prvky zobrazenia a priamym výpočtom rovníc zobrazenia zdôvodnite správnosť svojho odhadu (hypotézy).

4. (m) Majme v $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ priamku p zadanú parametricky bodom P a vektorom $\mathbf{u}$ ako $p : X = P + t\mathbf{u}$, pričom $P = (1,1,1), \mathbf{u} = (0,0,1), t \in \mathbb{R}$. Nájdite obraz trojuholníka $\triangle ABC$ pre $A = (2,3,1), B = (4,3,4), C = (3,3,6)$, ktorý vznikne otočením $\triangle ABC$ okolo priamky p o uhol $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

martina.batorova@sccg.sk

5. (m) Odvoďte rovnice súmernosti v $\mathbb{E}^3$ podľa roviny $x = 1$. Ďalej určte v tejto súmernosti obraz bodu $X = (2, -1, 1)$ a priamky $p \equiv \{x = 2, y = -2, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}\}$.
   Pozn.: Obraz vektora je určený obrazmi jeho koncových bodov.

6. Majme miestnosť tvaru kvádra, v ktorej je umiestnený bodový zdroj svetla. Tento zdroj má súradnice $(2, 2, 3)$ vzhľadom na svet. súr. súst. $\langle O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle$, ktorá je umiestnená do ľavého zadného spodného rohu miestnosti. Ďalej je v miestnosti tienidlo tvaru trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$, $B = (\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4})$ a $C = (\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 2)$.

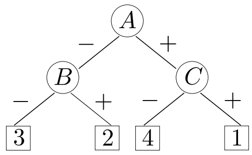
   (a) Zistite, ako bude vyzerať tieň, ktorý tienidlo vrhne na podlahu miestnosti. Nakreslite.

   (b) V miestnosti je položený rovnobežne so stenami perzský koberec, ktorý má roh v bode $P = (1, 1, 0)$ a je štvorcový so stranou dĺžky 5. Jeho lokálna súradnicová sústava je $\langle P, \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$. Vyjadrite tieň v lokálnej súradnicovej sústave koberca.

   (c) Aké tienidlo musíme vložiť do miestnosti, aby jeho tieň presne pokryl koberec?

OKRUH 2: Reprezentácie

1. (s) Na zadanom BSP strome nájdite **najvzdialenejší** prvok od pozorovateľa $P \in A^- \cap B^+ \cap C^+$. Cestu k nemu vykreslite.



2. (s) Na podložku tvaru jednofarebnej šachovnice vrhá priestorový objekt tieň. Tento tieň má tvar psíka s "chaplinovskými" nohami a v šacho-vo-matematickej terminológii sa dá opísať nasledovne:

$$\langle c, d \rangle \times \langle 5, 6 \rangle \bigcup \langle d, e, f \rangle \times \langle 3, 4 \rangle \bigcup \langle c, d \rangle \times \langle 2, 2 \rangle \bigcup \langle f, g \rangle \times \langle 2, 2 \rangle.$$

   Určte štvorstrom (quadtree) tohto útvaru a jeho lineárny záznam. Uvažujte poradie kvadrantov II,I,III,IV. Všetko dokumentujte obrázkami, opíšte a prehľadne označte všetky použité štruktúry a objekty.

3. (m) Napíšte podmienky, ktoré musia spĺňať súradnice bodu $X \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, ak má ležať na ploche Ω vytvorenej šablónovaním (sweepingom) v prípade, že:

   (a) Ω je guľová plocha so stredom $S = (1, 2, 3)$ a dĺžkou polomeru $r = 11$,

   (b) Ω je valcová plocha s podstavou v tvare elipsy so stredom v $S = (1, 2, 3)$, dĺžkami poloosí $a = 5, b = 4$ a dĺžkou výšky $v = 11$.

   Pozn.: Hlavná resp. vedľajšia poloos sú rovnobežné s osami y resp. x, výška je kolmá na základňu. Výsledok napíšte v tvare $\forall X \in \Omega : X = (x, y, z)$, t.j. všetky matice vynásobte!

OKRUH 3: Rasterizácia

1. (m) Rasterizujte orientovanú úsečku $\overrightarrow{AB} : A = (-3, 2), B = (-6, 6)$ Bresenhamovým algoritmom rasterizácie. Úsečku transformujte do V. oktantu roviny, napíšte celé odvodenie algoritmu (pre tento oktant), úsečku pomocou tohto odvodenia vyrasterizujte v V. oktante a následne transformujte späť do pôvodného oktantu. Vypíšte všetky výsledné súradnice vysvietených bodov rastra.

2. (s) Vysvetlite princíp práce algoritmu:

$x_1 := 8;$
$y_1 := -2;$

for $i := 1$ **to** 6 **do**
  begin
    $x_2 := \frac{1}{2}(x_1 - 3) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 + 2) + 3;$
    $y_2 := \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - 3) + \frac{1}{2}(y_1 + 2) - 2;$

    line(round(x_1), round(y_1), round(x_2), round(y_2));

    $x_1 := x_2;$
    $y_1 := y_2;$
  end;

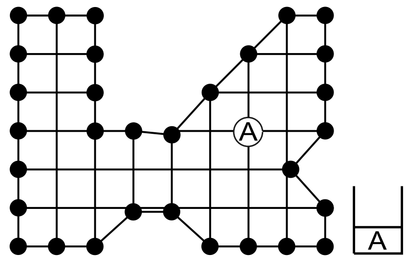
   Aký geometrický útvar sa ním vygeneruje? Vykreslite tento útvar a vypočítajte aspoň 3 jeho určujúce elementy (body, ...).

3. (s) Pomocou Bresenhamovho algoritmu rasterizácie rozložte do rastra prvý **kvadrant** kružnice $k : S = (10, 10), r = 10$.
   Pozn.: Napíšte celé odvodenie algoritmu, typ rozhodovacieho pravidla si môžete určiť sami.

OKRUH 4: Vypĺňanie

1. (f) Napíšte rasterizáciu mnohouholníka $ABCDE$: $A = (4, 1), B = (6, 5), C = (4, 5), D = (3, 7), E = (2, 4)$. Použite modifikovaný algoritmus **Scanline,** ktorý používa skenovacie priamky rovnobežné s osou y a zaokrúhľovanie **round.**
   Pozn.: Napíšte podrobné odvodenie, okomentujte a zdôvodnite použité dátové štruktúry a postupy.

2. (s) Riadkové semienkové vypĺňanie:
   (a) Opíšte **prednosti** riadkového semienkového vypĺňania a jeho **podstatu.** Odpoveď prehľadne člente do logických celkov, ako napr. Výhody, Inicializácia, Použité dátové štruktúry, Vypĺňanie nekonvexných mnohouholníkov atď.).
   (b) Uveďte schému algoritmu pre vyplnenie úseku $\mathcal{U}$ určeného skenovacou priamkou $y \in \mathbb{Z}$.
   (c) Demonštrujte chod algoritmu na uvedenom vstupe. Nakreslite všetky kroky algoritmu, uveďte aj hodnoty použitých dátových štruktúr:



OKRUH 5: Orezávanie

1. (s) Orežte úsečku P_0P_1 pre $P_0 = (-5, 3)$, $P_1 = (5, 3)$ trojuholníkom $\triangle ABC$, kde $A = (-4, 4), B = (4, 4), C = (0, 0)$ algoritmom **Liang-Barsky**. Orezávať začnite priamkou, ktorá je určená stranou $\triangle ABC$ rovnobežnou so súradnicovou osou x. Následne postupujte **proti smeru** chodu hodinových ručičiek. Použite **vnútorné** normály.

2. Orežte úsečky AB, CD a EF do okna určeného bodmi $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (11, 6)$ algoritmom **Cohen-Sutherland**, pričom $A = (4, 0)$, $B = (12, 8)$, $C = (-1, 4)$, $D = (5, 4)$, $E = (-3, 2)$, $F = (5, -2)$.

3. Orežte úsečku PQ lichobežníkom $STUW$, ak $S = (0, 0)$, $T = (12, -2)$, $U = (7, 3)$, $W = (4, 4)$ a $P = (0, 5)$, $Q = (8, -3)$. Na orezávanie použite **Cyrus-Beckov** algoritmus.

OKRUH 6: Viditeľnosť

1. Majme štvorboký ihlan $ABCDV$ s vrcholmi $A = (-2, 1, 0)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (2, -1, 0)$, $D = (-2, -1, 0)$ a $V = (0, 0, 2)$. Pomocou **algoritmu na odstránenie zadných stien** rozdeľte hrany na potenciálne viditeľné a neviditeľné, ak pozorovateľ je v bode $P = (-3, 3, 1)$ a pozerá sa do začiatku súradnicovej sústavy, ktorá je pravotočivá.

2. (s) Pomocou **maliarovho algoritmu** rozhodnite o viditeľnosti stien

$$\alpha_1 \equiv ABC, \alpha_2 \equiv ABD, \alpha_3 \equiv ACD, \alpha_4 \equiv BCD$$

   štvorstena $ABCD$, kde $A = (-5, -2, 6), B = (7, 4, 0), C = (1, -8, 6)$ a $D = (1, -2, 12)$ pri pohľade **zhora** (t.j. z nevlastného bodu $+\infty$ osi z).

3. (f) Majme v scéne s čiernym pozadím tri objekty:

   (a) červený štvorec $ABCD : A = (1, 2, 5), B = (1, 4, 5), C = (-1, 4, 7)$, $D = (-1, 2, 7)$,

   (b) modrý trojuholník $KLM : K = (2, 0, 2), L = (1, 6, 3), M = (-2, 3, 6)$,

(c) zelený lichobežník $PQRS : P = (4,5,1), Q = (4,3,4), R = (4,1,4), S = (4,1,1)$.

Pomocou algoritmu **x-buffer** zistite, akú farbu vidí pozorovateľ v pixloch $X = (3,3), Y = (3,6), Z = (0,0)$, ak sa nachádza v nevlastnom bode určenom vektorom $(-1,0,0)$.

4. (s) Je daná scéna skladajúca sa z nepriehľadného trojuholníka $\triangle T = \triangle A_1A_2A_3$, kde $A_1 = (18,12,0), A_2 = (22,16,0), A_3 = (14,22,14)$ a rovnako nepriehľadného obdĺžnika $\square O = \square B_1B_2B_3B_4$, kde $B_1 = (12,14,6), B_2 = (20,14,6), B_3 = (20,20,6), B_4 = (12,20,6)$. Na scénu sa pozeráme zdola, čiže v smere osi z.
Dvojkritériovým Warnockovým algoritmom (kritériá označte $K_1 \equiv 1$, $K_2 \equiv 2$) vyšetrite korektnosť viditeľnosti vyššie opísanej scény na obrázku nižšie. Úlohu riešte zodpovedaním resp. vyriešením nasledujúcich otázok resp. úloh:

   (a) Sformulujte kritériá K_1, K_2.

   (b) Prečo bolo potrebné deliť okno na podokná $O_{11}, O_{12}, O_{21}, O_{22}$ a čo sa tým vyriešilo?

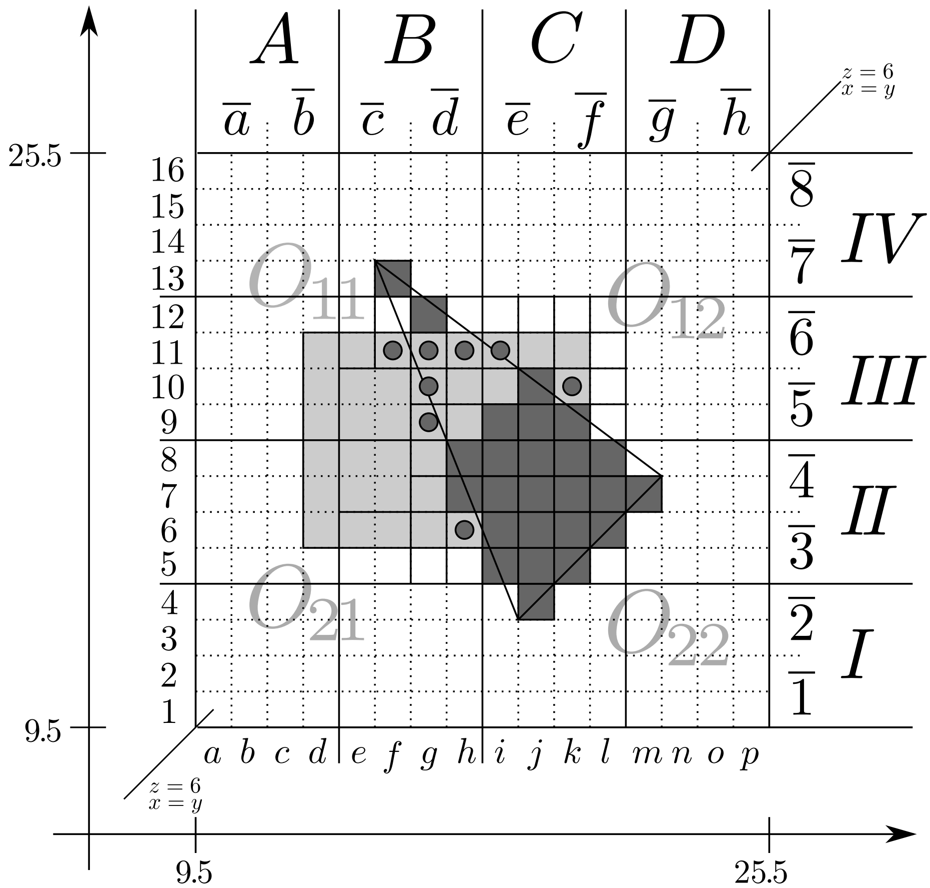
   (c) Rozdelením sme získali 16 okien typu $[A, I], \ldots, [D, IV]$. V ktorých z nich sa vyriešila viditeľnosť a podľa ktorého kritéria?

   (d) Ktoré zo zvyšných okien bolo treba rozdeliť a aké sú ich podokná?

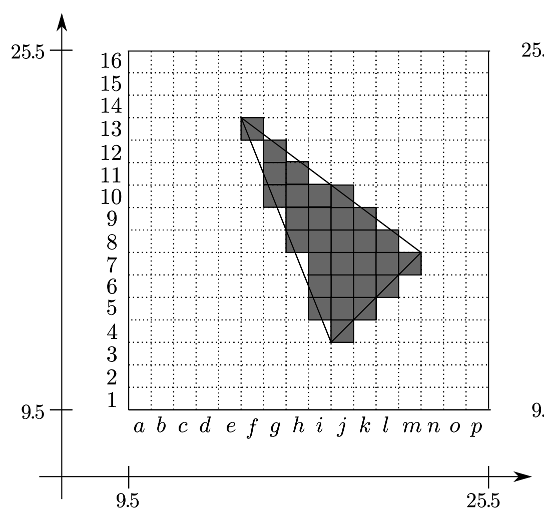
   (e) Medzi podoknami s „prúžkovanými" indexami nájdite aspoň jedno také, ktoré je celé pokryté aspoň jedným z mnohouholníkov T, O. Určte jeho farbu a svoju odpoveď zdôvodnite.

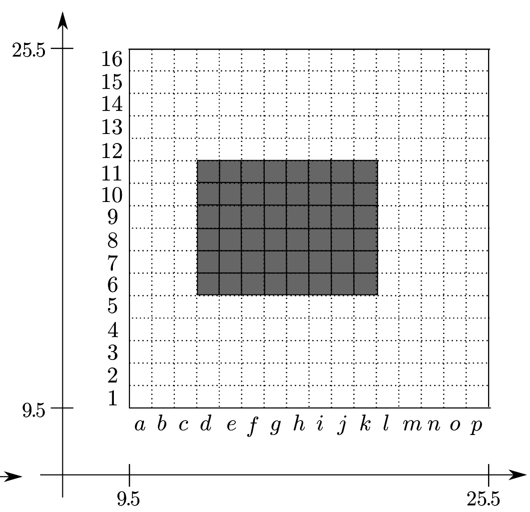
   (f) U ktorých podokien z bodu 4. sa týmto viditeľnosť vyriešila a ktoré treba ďalej deliť na pixle?

   (g) Ako sa zafarbia pixle $(j, 10), (i, 9), (h, 8)$? Prečo?



Rasterizácia objektov vyzerá nasledovne:





OKRUH 7: Zobrazovací kanál

1. (s) Zobrazovací kanál:
   (a) Uveďte všetky prvky, ktorými sa obvykle zadáva snímacia (pohľadová) karteziánska súradnicová sústava a ich matematické zadanie (vyjadrenie).
   (b) Podrobne opíšte konštrukciu prvkov jej určujúceho repéra.
   (c) Opíšte a vysvetlite rovnice udávajúce prechod od svetovej súradnicovej sústavy k snímacej (pohľadovej) (musia vyjadrovať pohľadové (snímacie) súradnice ako funkcie svetových).
   (d) Definujte priemetňu π, súradnicovú sústavu v nej (referenčný bod – začiatok súradnicovej sústavy a súradnicové osi – ich smerové vektory).
   (e) Opíšte konštrukciu zobrazovacích rovníc transformácie okno–záber a vysvetlite ich geometrický význam.
2. (s) Odvoďte zobrazovacie rovnice okna W ležiaceho v priemetni π na pohľadové okno V (záber).