ALGEBRA
Cvičenie 8

1. Pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

hľadáme také číslo λ a nenulový vektor $\vec{v}$, aby platilo $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Ekvivalentne, $\vec{v}$ je riešením sústavy

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}. \tag{1}$$

To znamená, že matica $A - \lambda I$ je singulárna, teda jej determinant musí byť nula. Pre vlastné číslo λ dostaneme rovnicu

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{10} - \lambda & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0,$$

ktorej korene sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$.
Vlastný vektor $\vec{v}_1$ prislúchajúci $\lambda_1 = 1$ dostaneme dosadením tejto vlastnej hodnoty do sústavy (1), t.j. riešením

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{-1}{10} & \frac{-3}{10} & 0 \\ \frac{-3}{10} & \frac{-9}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidno, že ako vlastný vektor môžeme zobrať $\vec{v}_1 = (3, -1)$.
Vlastný vektor $\vec{v}_2$ prislúchajúci $\lambda_2 = 0$ dostaneme dosadením tejto vlastnej hodnoty do sústavy (1), t.j. riešením

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} & 0 \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidno, že ako vlastný vektor môžeme zobrať $\vec{v}_2 = (1, 3)$.
Ľahko overíme, že $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ sú na seba kolmé. Zobrazenie f je potom určené podmienkami

$$f(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1, \qquad f(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Je to teda kolmá projekcia na priamku so smerom $\vec{v}_1 = (3, -1)$.

2. Charakteristický polynóm danej matice je

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1$$

a jeho korene sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Matica A je matica otočenia o uhol $\frac{\pi}{4}$. Jej vlastné čísla majú rád 8. Platí

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^8 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 \\ &= \cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\pm 8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) + i.\sin(\pm 2\pi) = 1. \end{aligned}$$

3. Charakteristický polynóm danej matice je

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Platí teda

$$A^2 - A + I = 0. \tag{2}$$

Počítajme mocniny matice A s využitím vzťahu (2).

$$\begin{aligned} A^2 &= A - I, \\ A^3 &= A.A^2 = A(A-I) = A^2 - A = -I, \\ A^4 &= A.A^3 = -A, \\ A^5 &= A.A^4 = -A^2 = -A + I, \\ A^6 &= A.A^5 = A(-A+I) = -A^2 + A = I. \end{aligned}$$

Keďže $A^6 = I$, tak zrejme pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí $A^{n+6} = A^n$.

4. Charakteristický polynóm danej matice je $-\lambda^3 + \lambda$. Platí teda

$$-A^3 + A = 0.$$

To znamená, že

$$A^{100} = A^3.A^{97} = A.A^{97} = A^{98} = A^3.A^{95} = A.A^{95} = A^{96} = \cdots = A^2.$$

Priamym výpočtom dostaneme

$$A^{100} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$