

ALGEBRA

Cvičenie 9

1. Lineárna transformácia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má maticu

$$A_f = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Rozborom vlastných hodnôt a vlastných vektorov ukážte, že f je kolmá projekcia a určte smer priamky na ktorú premieta.

2. Určte vlastné čísla a vlastné hodnoty matice rotácie

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otočeniu o aký uhol zodpovedá táto matica? Ako to súvisí s rádom jej vlastných čísel v grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$?

3. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že postupnosť $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosť mocnín matice A) je periodická s periódou 6.

Využite tvrdenie Cayleyho-Hamiltonovej vety, t.j. že ak dosadíme maticu do jej charakteristického polynómu, výsledok je nula.

$$\text{char}_A(A) = 0.$$

4. Vypočítajte A^{100} pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 1 \\ -7 & 7 & 1 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

DÚ Dokážte, že pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

je geometrická postupnosť $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$ aj aritmetickou postupnosťou, teda že diferenciacia $D = A^{n+1} - A^n$ je konštantná. Zároveň určte D .