ALGEBRA
Riešenia 2

9. Matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

má charakteristiký polynóm $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ a podľa Cayleyho-Hamiltonovej vety platí

$$-A^3 + 2A^2 - A = 0. \tag{1}$$

Priamym výpočtom rozdielu $A^2 - A$ dostanete

$$D = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Týmto sa ale úloha nekončí. Je potrebné *dokázať*, že rozdiel $A^{n+1} - A^n$ je vždy rovný D. Je úplne jedno pre koľko individuálnych hodnôt n daný rozdiel vypočítate, stále to nebude dôkaz. Správny dôkaz niekde využíva vzťah (1) alebo fakt, že $AD = D$.

10. Rýchlo ste zistili, že obe matice majú rovnaký charakteristický polynóm $-\lambda^3+9\lambda^2-36\lambda+54$. Ako ilustruje príklad 3 z cvičenia 10, to ešte nezaručuje, že matice budú podobné, pretože niektoré vlastné čísla môžu byť viacnásobné korene char. polynómu.
V tejto úlohe som teda očakával, že overíte, že charakteristický polynóm nemá žiadne viacnásobné korene. Najjednoduchšie tým, že všetky tri vypočítate. Platí

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 36\lambda + 54 = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda + 18)$$

a korene teda sú 3, $3 + 3i$ a $3 - 3i$.

Za výpočet char. polynómu bolo 5 bodov. Za určenie reálneho koreňa boli 2 body. Za určenie komplexných koreňov boli 3 body.