ALGEBRA
Cvičenie 8

1.

$$
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= 1.(-2).2 + (-1).3.(-3) + 2.2.(-1) \\
&\quad - 2.(-2).(-3) - (-1).2.2 - 1.3.(-1) \\
&= -4 + 9 - 4 - 12 + 4 + 3 \\
&= -4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= 2.(-2).(-2) + (-1).3.4 + 2.5.1 \\
&\quad - 2.(-2).4 - (-1).5.(-2) - 2.3.1 \\
&= 8 - 12 + 10 + 16 - 10 - 6 \\
&= 6.
\end{aligned}
$$

2. Determinant z blokovo diagonálnej matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je rovný súčinu determinantov matíc A a B.

$$
\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= (-2). \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2).(4 - 16 + 0 + 12 - 0 - 4) \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6+5).(-4+1) = 3.
$$

Nasledujúci determinant môžeme vypočítať pomocou Laplaceovho rozvoja podľa tretieho riadku.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}.\mathbf{1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

$$+ (-1)^{3+4}.\mathbf{1}. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\mathbf{1}.(-1) - 1.\mathbf{1}.(-3) = 2.$$

Posledný vypočítame pomocou riadkových operácií. Pripočítame násobky tretiaho riadku k ostatným. Potom prehodíme riadky, čo zmení znamienko determinantu. Nakonice upravíme na horný trojuholníkový tvar a determinant bude súčin prvkov na diagonále výsledku.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 1 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 4 & -6 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

3. Priamym výpočtom zistíme, že $|A_2| = 3$ a $|A_3| = 4$. Počítajme $|A_n|$ pomocou Laplaceovho rozvoja podľa prvého riadku.

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Prvý determinant je $|A_{n-1}|$. Druhý determinant je podľa rozvoje podľa prvého stĺpca rovný $|A_{n-2}|$. Platí teda

$$|A_n| = 2.|A_{n-1}| - |A_{n-2}|.$$

Matematickou indeukciou ľahko dokážeme, že platí $|A_n| = n + 1$.