ALGEBRA
Cvičenie 7

1. Podľa kritéria podgrupy potrebujeme overiť, že pre ľubovoľné dva prvky (n, n) a (n', n') z množiny D platí, že ich rozdiel tiež leží v D. Keďže

$$(n, n) - (n', n') = (n - n', n - n'),$$

tak je to zrejmé.

2. Nech $\frac{m}{2^n}, \frac{m'}{2^{n'}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ sú ľubovoľné prvky. Predpokladjme najskôr, že $n \geq n'$. Počítajme ich rozdiel

$$\frac{m}{2^n} - \frac{m'}{2^{n'}} = \frac{m}{2^n} - \frac{m' \cdot 2^{n-n'}}{2^n} = \frac{m - m' \cdot 2^{n-n'}}{2^n}.$$

Čitateľ je celé číslo a menovateľ je mocnina dvojky, výsledok teda leží v $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Ak platí $n \leq n'$, ich rozdiel vypočítame podobne a výsledok bude

$$\frac{m \cdot 2^{n'-n} - m'}{2^{n'}},$$

čo je opäť zlomok s celočíselným čitateľom a menovateľom mocninou dvojky.

3. Keďže $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ je multiplikatívna grupa (operácia je násobenie), pri kritériu podgrupy budeme uvažovať podiel. Na výpočet podielu komplexných čísel požijeme vzťah

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Absolútna hodnota $|z|$ komplexného čísla $z = a + bi$ je daná $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nech $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ sú prvky v S. Počítajme $z_1 z_2^{-1}$.

$$z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = (a+bi)(c-di) = (ac+bd)+(bc-ad)i.$$

Potrebujeme zistiť, či absolútna hodnota $|z_1 z_2^{-1}|$ je rovná 1.

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2^{-1}| &= \sqrt{(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}, \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}, \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(c^2 + d^2)} = |z_1||z_2| = 1.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $z_1 z_2^{-1}$ tiež leží v S ako sme chceli a teda S je podgrupa.

Neutrálny prvok v grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ je číslo 1. Keďže $(-1)^2 = 1$, rád prvku -1 je 2. Pre mocniny i a $-i$ platí

$$\begin{array}{ll} i^1 = i & (-i)^1 = -i \\ i^2 = -1 & (-i)^2 = -1 \\ i^3 = -i & (-i)^3 = i \\ i^4 = 1 & (-i)^4 = 1 \end{array}$$

z čoho vidno, že rády oboch prvkov sú 4.
Prvok $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ má nasledovné mocniny

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = 1$$

a jeho rád je 6.
Všimnime si, že $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$ a horeuedené vzťahy sa dajú jednotne zapísať

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right),$$

čo je špeciálny prípad Moivreovej vety. Analogické vzťahy platili aj pre čísla $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$ a $-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})$.
Zrejme

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

bude prvok rádu n.

4. Po označení

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

dostaneme vzťahy

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1},$$

z ktrorých vylýva, že množina $\{\pm\mathbb{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$ je uzavretá vzhľadom na inverzné prvky. Zo vzťahov

$$\begin{array}{rrr} IJ = K & \qquad JK = I & \qquad KI = J \\ JI = -K & \qquad KJ = -I & \qquad IK = -J \end{array}$$

dostaneme, že množina $\{\pm\mathbb{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$ je uzavretá aj vzhľadom na súčin a teda tvorí podgrupu.
Neutrálny prvok $\mathbb{1}$ je rádu 1, $-\mathbb{1}$ je rádu 2 a zvyšné prvky sú rádu 4.