

ALGEBRA

Cvičenie 7

1. V grupe $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ so sčítaním po zložkách ukážte, že podmnožina $D = \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ tvorí podgrupu.

2. Nech $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$ je množina čísel vyjadriteľných ako zlomok s menovateľom mocninou dvojky. Dokážte, že táto množina tvorí podgrupu grupy racionálnych čísel $(\mathbb{Q}, +)$.

3. Množina $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ tvorí podgrupu $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Dokážte. Určte rády prvkov $-1, i, -i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Pre každé prirodzené číslo n nájdite v tejto podgrupe prvok rádu n .

4. Dokážte, že matice

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}$$

tvoria podgrupu grupy regulárnych komplexných matíc a určte rády týchto matíc v tejto grupe.