ALGEBRA
Cvičenie 6

1. Overiť, či $\vec{u}$ leží v S znamená zistiť, či sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia

$$\vec{u} = c_1(1,3,1,6) + c_2(2,-2,2,4) + c_3(3,-3,1,2)$$

teda, či existuje riešenie (c_1, c_2, c_3) lineárneho systému

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Výpočtom dospejete k riešeniu $c_1 = \frac{2}{8}, c_2 = \frac{-9}{8}, c_3 = 1$.

Analogicky, pre vektor $\vec{v}$ dostanete ako riešenie príslušného systému trojicu $c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = \frac{-1}{8}, c_3 = \frac{1}{2}$.

V oboch prípadoch riešenie existovalo a preto vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ležia v danom podpriestore. Z definície lineárneho obalu vyplýva, že aj $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \subseteq S$, pretože S obsahoval $\vec{u}$ aj $\vec{v}$ a lineárny obal $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ je najmenší podpriestor obsahujúci dané vektory.

Na druhej strane podpriestor S obsahuje vektory, ktoré sa nenachádzajú v $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, napríklad aj vektor $(1,3,1,6)$, lebo príslušný systém, ktorý s ním zostavíte nemá žiadne riešenie.

2. Dokážeme najskôr, že platí inklúzia $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$. Nech $\vec{u}$ leží v ľavom lineárnom obale $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$. Potom sa musí dať vyjadriť pre vhodné $c_1,c_2,\dots,c_n \in F$ ako lineárna kombinácia

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n.$$

Podľa predpokladu je $c \neq 0$ a teda existuje prvok $c^{-1} \in F$ a môžeme upraviť

$$\begin{aligned}\vec{u} &= c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n\\ &= c_1(c^{-1}c)\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n\\ &= c_1c^{-1}(c\vec{v}_1) + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n.\end{aligned}$$

Keďže sa nám týmito úpravami podarilo zapísať $\vec{u}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ tak platí aj $\vec{v} \in \langle c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$.

Tým sme dokázali, že pre ľubovoľné vektory a skalár $c \neq 0$ teda platí $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$.

Keď túto práve dokázanú inklúziu aplikujeme na vektory $c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ a nenulový skalár c^{-1} dostaneme, že platí $\langle c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle c^{-1}c\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$.

Lenže to nie je nič iné ako opačná inklúzia. Preto sa oba lineárne obaly musia rovnať.

V druhej časti úlohy budeme uvažovať lineárny obal $\langle\vec{v}_1+c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$. Každý vektor z neho je tvaru

$$c_1(\vec{v}_1 + c\vec{v}_2) + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n.$$

Lenže to môžeme upraviť na nasledovný tvar

$$c_1\vec{v}_1 + (c_1c + c_2)\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n,$$

z ktorého vidno, že daný vektor leži aj v $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$. Teda sme práve dokázali inklúziu $\langle\vec{v}_1+c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$.

Analogicky ako v predošlom, keď toto aplikujeme na vektory $\vec{v}_1+c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ a skalár $-c$ dostaneme $\langle\vec{v}_1+c\vec{v}_2-c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle\vec{v}_1+c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$, čo je presne opačná inklúzia $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle \subseteq \langle\vec{v}_1+c\vec{v}_2,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$. Oba lineárne obaly sa preto musia rovnať.

3. Nech

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,-1,3,-2),(2,-3,4,-2),(1,-3,-1,2)\rangle,\\ T &= \langle (4,-2,-4,2),(3,0,-5,2)\rangle, \end{aligned}$$

Potom S je lineárny obal riadkov matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2\\ 2 & -3 & 4 & -2\\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z predošlej úlohy vyplýva, že lineárny obal riadkov sa nezmení ak vykonáme ľubovoľnú elementárnu riadkovú operáciu. Maticu teda upravíme a postupne dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & -2 & 2\\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teda podpriestor S vieme vygenerovať pomocou dvoch vektrorov nasledovne

$$S = \langle (1,0,5,-4),(0,1,2,-2)\rangle.$$

To isté prevedieme s T a dostanme

$$T = \left\langle \left(1,0,\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right), \left(0,1,\frac{-4}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle.$$

Každý vektor z S je lineárna kombinácia $c_1(1,0,5,-4)+c_2(0,1,2,-2)$. Každý vektor z T je tvaru $c_3\left(1,0,\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right)+c_4\left(0,1,\frac{-4}{3},\frac{1}{3}\right)$. Potrebujeme zistiť práve kedy sa oboma týmito spôsobmi dá vyjadriť ten istý vektor, t.j. riešime rovnicu

$$c_1(1,0,5,-4)+c_2(0,1,2,-2) = c_3\left(1,0,\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right)+c_4\left(0,1,\frac{-4}{3},\frac{1}{3}\right), \quad (1)$$

alebo po prehodení na ľavú stranu

$$c_1(1,0,5,-4)+c_2(0,1,2,-2)-c_3\left(1,0,\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right)-c_4\left(0,1,\frac{-4}{3},\frac{1}{3}\right) = (0,0,0,0).$$

Porovnaním súradníc oboch strán rovnice dostaneme lineárny systém

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 2 & 5/3 & 4/3 & 0\\ -4 & -2 & -2/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right),$$

ktorého riešením je každá usporiadaná štvorica $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-\frac{1}{2}t, t, -\frac{1}{2}t, t)$ pre parameter $t \in \mathbb{R}$.

To ale nie je hľadaný vektor, na jeho získanie potrebujem tieto hodnoty naspäť dosadiť do rovnice (1) a vypočítať spoločnú hodnotu ľavej a pravej strany.

$$Ľ = -\frac{1}{2}t(1,0,5,-4) + t(0,1,2,-2) = (-\frac{t}{2}, t, -\frac{t}{2}, 0) = \frac{t}{2}(-1,2,-1,0),$$
$$P = -\frac{1}{2}t\left(1, 0, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) + t\left(0, 1, \frac{-4}{3}, \frac{1}{3}\right) = (-\frac{t}{2}, t, -\frac{t}{2}, 0) = \frac{t}{2}(-1,2,-1,0).$$

V prieniku $S \cap T$ ležia práve všetky násobky vektora $(-1,2,-1,0)$ a teda $S \cap T = \langle(-1,2,-1,0)\rangle$.