ALGEBRA
Cvičenie 6

1. Takto vyzerá tabuľka operácie pre S_3. V každom okienku je výsledok zloženia riadku a stĺpca. Jednotkou značíme neutrálny prvok.

$r \circ s$	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
1	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(321)
(12)	(12)	1	(321)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	1	(321)	(12)	(23)
(23)	(23)	(321)	(123)	1	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(321)	1
(321)	(321)	(23)	(12)	(13)	1	(123)

Máme triviálnu podgrupu $G_1 = \{1\}$ a celú grupu $G_6 = S_3$ ako podgrupu.

Prvky $(12), (13), (23)$ sú inverzné sami k sebe, teda vygenerujú podgrupy $G_{12} = \{1, (12)\}$, $G_{13} = \{1, (13)\}$ a $G_{23} = \{1, (23)\}$.

Prvok (123) a (321) vygenerujú tú istú podgrupu $G_{123} = \{1, (123), (321)\}$.

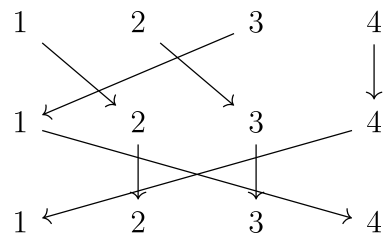
Nie je ťažké overiť, že uvedené podmnožiny spĺňajú kritérium podgrupy. Rozmyslite si, že ľubovoľná transpozícia a cyklus vygenerujú už nutne všetko a teda uvedené podgrupy sú všetky možné.

2. Vieme, že ľubovoľná permutácia n prvkov sa dá rozložiť na súčin disjunktných cyklov. Stačí preto dokázať, že každý cyklus $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ vieme rozložiť na súčin transpozícií.

Ako vidno napríklad z tretieho riadku a druhého stĺpca tabuľky v predošlom príklade $(123) = (13)(12)$. Skúsme z tohto cyklu a vhodnej transpozície teraz odvodiť cyklus (1234), t.j. určiť také a, b, aby $(1234) = (ab)(123)$.

V cykle (123) sa posledný prvok, trojka, zobrazila na prvý prvok, jednotku. Chceme však aby sa teraz zobrazila na štvorku, teda obraz trojky potrebujeme ešte prehodiť so štvorkou. Skúsme teda $(ab) = (14)$.

Výpočet (14)(123) môžeme znázorniť nasledovne.



Vidíme, že výsledná permutácia je naozaj cyklus (1234), ako sme chceli. Teda $(1234) = (14)(123) = (14)(13)(12)$. Je zrejmé, že cyklus $(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ možno rozložiť podobným spôsobom na súčin $(a_1\ a_n)\dots(a_1\ a_2)$.

3. Stačí si nakresliť príslušný diagram a rozložiť výsledok na disjunktné cykly, tak ako sme to robili minule, a potom podľa úlohy 2 na súčin transpozícií.