ALGEBRA
Cvičenie 4 riešenia

1. Nech A je matica
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Aby táto matica bola z množiny $O(2)$ musí byť regulárna a musí zobrazovať ľubovoľný pár vektorov $\vec{x}, \vec{y}$ na pár vektorov s ronakým skalárnym súčinom.

Dosaďme najskôr isté vybrané vektory za $\vec{x}, \vec{y}$. Začnime s $\vec{x}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A\vec{x} = A\vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ teda $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a preto $a^2 + c^2 = 1$.

Analogicky, pre $\vec{x}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dostaneme, že $b^2 + d^2 = 1$.
Môžeme preto zatiaľ povedať, že matica $A \in O(2)$ je nutne tvaru
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \cos(\psi) \\ \sin(\varphi) & \sin(\psi) \end{pmatrix},$$
pre nejaké parametre $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$.

Dosaďme ďalej $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tieto vektory sú na seba kolmé, preto aj $A\vec{x}$ a $A\vec{y}$, t.j. stĺpce matice A, musia byť na seba kolmé. Dostaneme podmienku
$$\begin{aligned} \cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi) &= 0, \\ \cos(\varphi - \psi) &= 0, \\ \varphi - \psi &= \pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$
Prípad $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ vedie na maticu rotácie
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = R_\varphi.$$

Prípad $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$ vedie na maticu reflexie

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = S_{\frac{\varphi}{2}}.$$

Z predošlých cvičení vieme, že reflexie zachovávajú skalárny súčin a že rotácie sú zloženia dvoch reflexií a majú teda tiež túto vlastnosť. Množina všetkých rotácií a reflexií v rovine je uzavretá vzhľadom na skladanie zobrazení, teda množina všetkých matíc rotácie a reflexie je uzavretá vzhľadom na násobenie matíc. Operácia násobenia je asociatívna, rotácia o nulový uhol je neutrálny prvok a platí $R_{\varphi}^{-1} = R_{-\varphi}$ a $S_{\alpha}^{-1} = S_{\alpha}$. Množina $O(2)$ s operáciou násobenia je preto grupa. Táto grupa nie je abelovská.

2. Overíme, že súčin ľubovoľných dvoch matíc z G leží tiež v G. Platí

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

Keďže $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) > 0$, tak výsledná matica je naozaj nenulová, ako požadujeme.
Násobenie je asociatívne a z predošlého výpočtu tiež vidno, že násobenie matíc z množiny G bude navyše komutatívne.

Nájdeme neutrálny prvok. Nech $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ je taká matica, že pre každú $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ platí

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Snáď vidno, že $c = 1$ a $d = 0$ je riešením. Teda jednotková matica je neutrálny prvok.

Poďme vypočítať inverzný prvok k $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$. Najskôr pre špeciálny prípad, keď $a = 0$. Ľahko dostaneme, že

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Teraz predpokladajme, že $a \neq 0$ a riešme rovnicu

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém rovníc

$$ac - bd = 1,$$
$$ad + bc = 0$$

Keďže predpokladáme, že $a \neq 0$, z druhej ronice môžeme vyjadriť $d = -\frac{bc}{a}$ a dosadiť do prvej.

$$ac + b\frac{bc}{a} = 1,$$
$$a^2c + b^2c = a,$$
$$(a^2 + b^2)c = a.$$

Z čoho máme výsledok

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

Matica

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

zrejme leží v množine G, pretože a a b nie sú zároveň nuly a z toho ako bola odvodená a z komutatívnosti operácie . na množine G je teda hľadaným inverzným prvkom k $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$.