ALGEBRA
Cvičenie 4

1. Nech $O(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{R})\colon \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2\colon \ \langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle\}$. Dokážte, že $O(2)$ pozostáva práve z reflexií a rotácií v rovine a teda že s operáciou násobenia tvorí grupu.

2. Nech G je množina daná

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0) \right\}.$$

Ukážte, že $(G, .)$ je abelovská grupa.

4. Nech $x * y = x + y + xy$. Ukážte, že $*$ je binárna operácia na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a že $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ je abelovská grupa.

DÚ Zvoľte nejaké nenulové celé čísla a, b, tak aby $a \neq 0, 1$ a $b \neq 0$. Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazenie dané $f(x) = ax+b$. Definujme $G = \left\{ r \in \mathbb{R} : r \neq \frac{-b}{a} \right\}$. Definujeme $\circ$ predpisom

$$x \circ y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)).$$

Napíšte prepis a overte, že $\circ$ je binárna operácia na G. Dokážte, že $(G, \circ)$ je abelovská grupa.