ALGEBRA

Cvičenie 3 riešenia

1. Každú elementárnu riadkovú operáciu na matici X možno vyjadriť pomocou súčinu matíc.

Vynásobenie i-teho riadku skalárom c je to isté ako počítať súčin EX, kde E je

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

teda diagonálna matica s prvkami 1 okrem prvku c na mieste (i, i).

Výmenu i–teho a j–teho riadku možno realizovať sko súčin EX, kde E je

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

teda matica s jednotkami na miestach (i, j), (j, i) a (k, k) pre všetky $k \neq i, j$.

Pripočítanie c–násobku i-teho riadku k j-temu riadku možno vyjadriť ako súčin EX, kde E je

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

teda matica s jednotkami na diagonále a prvkom c na mieste (j, i).

To znamená, že vykonanie jednej elementárnej riadkovej operácie v schéme $(X|Y) \sim (X_1|Y_1)$ zodpovedá tomu, že existuje matica E taká, že $X_1 = EX$ a zároveň $Y_1 = EY$. Potom ale $X_1^{-1}Y_1 = (EX)^{-1}EY = X^{-1}E^{-1}EY = X^{-1}Y$, čo sme chceli.

To nám dáva návod na počítanie inverzných matíc a dokonca ešte všeobecnejšie na počítanie súčinov typu $A^{-1}B$ pre ľubovolnú regulárnu maticu A a kompatibilnú maticu B. Ak budeme v danej schéme vykonávať také operácie, ktoré maticu A upravia na jednotkovú, teda (po dosadení $X = A$ a $Y = B$)

$$(A|B) = (X|Y) \sim (X_1|Y_1) \sim (X_2|Y_2) \sim \cdots \sim (X_n|Y_n) = (I|C), \qquad (1)$$

tak máme

$$A^{-1}B = X^{-1}Y = X_1^{-1}Y_1 = X_2^{-1}Y_2 = \cdots = X_n^{-1}Y_n = I^{-1}C = C.$$

Matica C je výsledok $C = X^{-1}Y = A^{-1}B$.

Špeciálne pre $B = I$ to hovorí, že

$$(A|I) \sim (I|A^{-1}).$$

Naopak, ak potrebujeme počítať súčin $D = BA^{-1}$, namiesto toho najskôr počítajme D^T (transponovanú maticu D). Platí

$$D^T = (BA^{-1})^T = (A^{-1})^T B^T = (A^T)^{-1}(B^T),$$

teda maticu D^T dostaneme opäť predošlým spôsobom, ak dosadíme $X = A^T$ a $Y = B^T$.

2. a) Označme

$$\vec{x_1} = (1,2,1) \qquad \vec{y_1} = (1,2)$$
$$\vec{x_2} = (-1,3,1) \qquad \vec{y_2} = (2,-2)$$
$$\vec{x_3} = (-1,-2,5) \qquad \vec{y_3} = (-7,-2)$$

Lineárne zobrazenie f zobrazuje vektory $\vec{x_i}$ na $\vec{y_i}$, teda pre jeho maticu A_f platí $\vec{y_i}^T = A_f \vec{x_i}^T$ pre $i = 1,2,3$. Transponovaním týchto rovníc dostaneme

$$\vec{y_1} = \vec{x_1} A_f^T,$$
$$\vec{y_2} = \vec{x_2} A_f^T,$$
$$\vec{y_3} = \vec{x_3} A_f^T,$$

Ak označíme X maticu s riadkami $\vec{x_i}$ a Y maticu s riadkami $\vec{y_i}$ tak všetky tri rovnice vieme zhrnúť do jednej a vyjadriť

$$Y = X A_f^T \implies X^{-1} Y = A_f^T.$$

Podľa (1) vypočítame A_f^T.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & -7 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (I|A_f^T).$$

Po transponovaní naspäť dostaneme výsledok

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Časti b) a c) podobne.

3. Výpočtom overte, že pre matice

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

sú všetky súčiny $R_\varphi R_\psi$, $R_\varphi S_\alpha$, $S_\alpha R_\varphi$ a $S_\alpha S_\beta$ opäť jedného z daných typov (napr. $R_\varphi R_\psi = R_{\varphi+\psi}$).