

ALGEBRA
Cvičenie 11

1. Overte že v priestore spojitých funkcií na intervale $[-1, 1]$ je predpisom

$$f \cdot g := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

definovaný skalárny súčin funkcií f, g .

2. V takto definovanom priestore určte normu nasledujúcich funkcií

a) $\sin(\pi x)$,

b) $\cos(\pi x)$,

c) $|x|$.

3. Pre ľubovoľné spojité funkcie f, g použitím Cauchy-Schwartzovej nerovnosti pre $|f|$ a $|g|$ dokážte tento špeciálny prípad Hölderovej nerovnosti

$$\int_{-1}^1 |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$