

ALGEBRA
Cvičenie 10

1. Determinant matice A je 6. Inverzná matica teda je

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 11 \\ -4 & 0 & 10 \\ -4 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla matice A sú 1, 2, 3. Vlastné čísla inverznej matice budú ich prevrátené hodnoty, teda $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Vlastné vektory budú rovnaké. Platí totiž

$$A\vec{v}^T = \lambda\vec{v}^T \iff \lambda^{-1}\vec{v}^T = A^{-1}\vec{v}^T.$$

2. Prvý invariant, ktorý môžeme uvažovať je rozmer matice a tým zistíme, že žiadne A_i nie je podobné so žiadnym B_j . Stopy a determinanty uvedených matíc sú nasledovné

$$\begin{array}{lll} \text{tr}(A_1) = 5, & \text{tr}(A_2) = 7, & \text{tr}(A_3) = 5, \\ \det(A_1) = 6, & \det(A_2) = 6, & \det(A_3) = 4, \end{array}$$

teda žiadne A_i nie je podobné so žiadnym A_j pre $i \neq j$.

Ďalej

$$\begin{array}{lll} \text{tr}(B_1) = 4, & \text{tr}(B_2) = 4, & \text{tr}(B_3) = 4, \\ \det(B_1) = -6, & \det(B_2) = 0, & \det(B_3) = 0, \end{array}$$

na základe čoho môžeme vylúčiť podobnosť B_1 s B_2 alebo B_3 . Aby sme ukázali, že B_2 a B_3 nie sú podobné, potrebujeme uvažovať celý charakteristický polynóm. Výpočtom dostaneme

$$\begin{array}{l} \text{char}_{B_2}(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda, \\ \text{char}_{B_3}(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda. \end{array}$$

3. Obe matice majú rovnaký charakteristický polynóm

$$\text{char}_A(\lambda) = \text{char}_B(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Matice napriek tomu nie sú podobné. Všimnime si, že $\lambda = 1$ je dvojnásobný koreň charakteristického polynómu. Ale zatiaľ čo pre maticu A vlastnému

čísle $\lambda = 1$ prislúchajú dva lineárne nezávislé vlastné vektory $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ a $\vec{v}_2 = (-3, 1, 0)$, pre maticu B nájdeme len jeden $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Dôvod je, že pre $\lambda = 1$ matice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

majú rôzne hodnoty, 1 a 2. Ak by A a B boli podobné, tieto matice by museli mať rovnakú hodnotu.