

Projektívna geometria

8 Riešenia

1. Kolinearitu bodov môžeme overiť pomocou determinantu ich súradníc.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot (-3) - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Nulový determinant znamená, že body sú kolineárne.

Bod C je nevlastný, teda pre dvojpomer $(ABCD)$ platí

$$|(ABCD)| = \frac{|BD|}{|AD|}.$$

Znamienko dvojpomeru je záporné, teda dvojice (A, B) a (C, D) sa musia oddeľovať, čo vzhľadom na polohu bodu C znamená, že D sa nachádza vnútri Euklidovskej úsečky AB . Vektory $\overrightarrow{BD}$ a $\overrightarrow{AD}$ majú opačnú orientáciu. Spojením všetkých informácií dostaneme vzťah

$$\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \text{ resp. } \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$

Upravením

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\ \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) \\ \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Z homogénnych súradníc vlastného bodu A odvodíme jeho štandardné súradnice $(4, 1)$ a podobne dostaneme štandardné súradnice bodu B ako $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ je vektor $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) - (4, 1) = (-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ a teda

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}) = (-1, -1),$$

z čoho súradnice bodu D sú $(4, 1) + (-1, -1) = (3, 0)$ a ako jeho homogénne súradnice môžeme zobrať napríklad $(1 : 3 : 0)$.

2. Zostavíme systém rovníc rovnako ako v dôkaze vety 8.2.

$$\begin{array}{rcl} a + b & - \lambda & = 0 \\ a - b & - \lambda' & = 0 \\ a & & = 0 \\ & c + d + \lambda & = 0 \\ & c - d & - 3\lambda' = 0 \\ & c & + \lambda'' = 0 \end{array}$$

Z prvých troch rovníc vidíme, že $a = 0$, $b = -\lambda'$ a $\lambda = -\lambda'$.

Z poslednej rovnice máme $c = -\lambda''$.

Dosadením do zostávajúcich dostaneme

$$\begin{array}{rcl} d - \lambda' - \lambda'' & = & 0 \\ -d - 3\lambda' - \lambda'' & = & 0 \end{array}$$

Vyjadríme d pomocou λ'' pričítaním (-3) -násobku hornej rovnice ku spodnej

$$-4d + 2\lambda'' = 0$$

Teda $d = \frac{1}{2}\lambda''$. Dosadením do jednej z daných dvoch rovníc vyjadríme aj $\lambda' = -\frac{1}{2}\lambda''$.

Všeobecné riešenie je preto

$$\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{1}{2}\lambda'' \\ c = -\lambda'' \\ d = \frac{1}{2}\lambda'' \\ \lambda = \frac{1}{2}\lambda'' \\ \lambda' = -\frac{1}{2}\lambda'' \end{array}$$

Zvolením ľubovoľnej nenulovej hodnoty λ'' dostaneme príslušnú maticu. Napríklad pre $\lambda'' = 2$ je

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a rovnica projektívnosti π je

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

3. Nech X je ľubovoľný bod so súradnicami $(x_0 : x_1)$. Priamo vypočítajme súradnice bodu $\pi_M(\pi_M(X))$.

Ak označíme $(x'_0 : x'_1)$ súradnice $\pi_M(X)$ a $(x''_0 : x''_1)$ súradnice $\pi_M(\pi_M(X))$, tak

$$\begin{pmatrix} x''_0 \\ x''_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Lenže, ako sa môžeme presvedčiť

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

teda $\pi_M(\pi_M(X)) = X$ pre každý bod X , čo znamená, že $(X, \pi_M(X))$ je vratnou dvojicou a teda π_M je involúcia.

4. Ak $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, jeho obraz X' má súradnice MX . Tieto súradnice budú súradnice toho istého bodu práve vtedy, ak existuje nenulové číslo λ také, že

$$MX = \lambda X. \quad (1)$$

Toto je úloha na hľadanie vlastných čísel a vlastných vektorov matice M .

Ak ste sa ešte s vlastnými číslami nestretli, štandardný postup riešenia je nasledovný. Rovnicu (1) prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} MX - \lambda X &= 0, \\ (M - \lambda I)X &= 0, \end{aligned}$$

kde I je jednotková matica (v tomto prípade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Keďže súradnice bodu X sú nenulové, táto sústava rovníc má riešenie iba ak determinant matice $M - \lambda I$ je rovný nule.

V príklade a) je tento determinant nasledovný

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Toto je rovné nule pre $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$ (sú to korene uvedeného polynómu).

Pre $\lambda_1 = 2$ je matica $M - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a sústava $(M - \lambda_1 I)X = 0$ je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ktorej riešením je ľubovoľný násobok stĺpca $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

To znamená, že platí (pozri (1))

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a teda bod X_1 so súradnicami $(1 : 1)$ je samodružný bod.

Pre $\lambda_2 = 4$ je matica $M - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ a sústava $(M - \lambda_2 I)X = 0$ je

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ktorej riešením je ľubovoľný násobok stĺpca $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

To znamená, že platí

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a teda bod X_2 so súradnicami $(-1 : 1)$ je samodružný bod.

Podobným spôsobom môžete riešiť ostatné príklady.

V časti b) vyjde polynóm $\lambda^2 - \lambda + 1$, ktorý nemá reálne korene a teda π_M nebude mať samodružné body.

V časti c) vyjde polynóm $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, ktorý má reálny koreň $\lambda = 2$, pre ktorý dostanete samodružný bod so súradnicami $X = (1 : 0)$.

9 Riešenia

1. a) Rovnakým spôsobom určíme samodružné body. Máme

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Vlastné číslo je $\lambda_1 = 1$, pomocou ktorého nájdeme jediný samodružný bod $(1 : 0 : 0)$. Tento bod ale nie je stred kolineácie. Ak by bol stredom, tak by táto kolineácia mala aj os a teda celú priamku tvorenú samodružnými bodmi, čo v tomto prípade neexistuje. Z toho môžeme usúdiť, že táto kolineácia je rotácia so stredom $(1 : 0 : 0)$.

b) Opäť určíme $\lambda_1 = 1$, ale teraz riešením sústavy $(M_2 - \lambda_1 I)X = 0$, t.j.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je každý bod so súradnicami $(0 : x_1 : x_2)$ pre ľubovoľné x_1, x_2 . To znamená, že každý nevlastný bod je samodružný. Nevlastná priamka je teda osou a stred je nejaký bod na nej. To znamená, že táto kolineácia je posunutie.

c) V tomto prípade máme vlastné čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Podobne ako v predošlom z $\lambda_2 = 2$ dostaneme, že nevlastná priamka je osou. Teraz ale máme aj vlastný samodružný bod prislúchajúci $\lambda_1 = 1$ a to bod $(1 : 0 : 0)$. Ten bude zrejme stredom a táto kolineácia je rovnoľahlosť.

d) Podobne ako v a) toto bude rotácia so stredom $(1 : 0 : 0)$. Líši sa tým, že otáčame o iný uhol, ale nebudeme sa zatiaľ zaoberať ako určiť tento uhol.

e) Máme $\lambda_1 = 2$ a odvodíme, že ide o kolineáciu s osou $x_2 = 0$, čo je v tomto prípade vlastná priamka. Ide o určitú eláciu s touto osou.