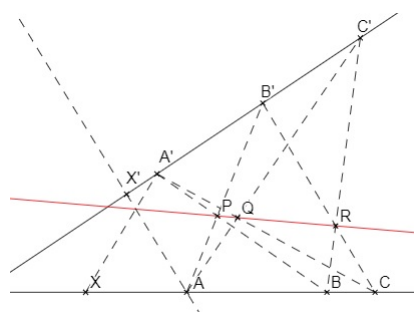


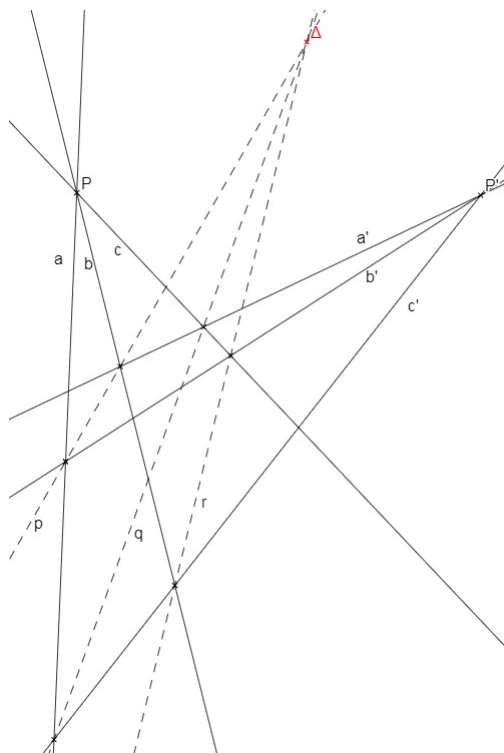
Projektívna geometria

6 Riešenia

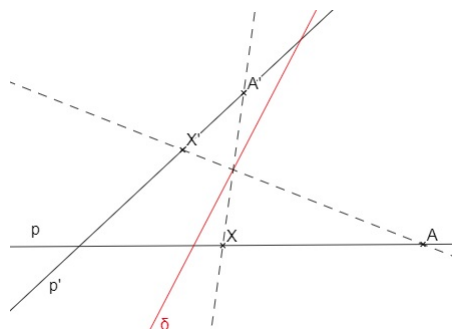
1. Podľa definície body $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $R = BC' \cap B'C$ ležia na direkčnej osi δ . Obraz bodu $X \in p$ v projektívnosti π skonštruujeme opäť z definície pomocou zloženia dvoch perspektívností $p \xrightarrow[A]{A'} \delta \xrightarrow[A]{A} p'$.



2. Duálna situácia vyzerá nasledovne. Bod Δ je direkčný stred.



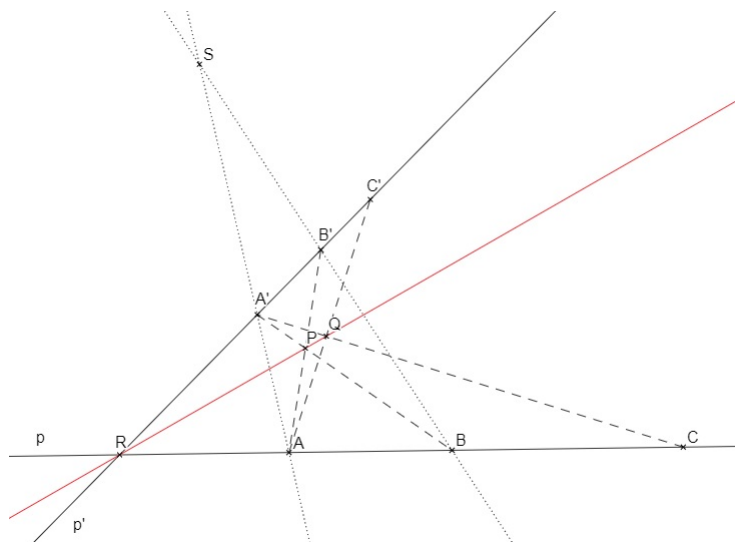
3. Obraz X' bodu $X \in p$ v projektívnosti π skonštruujeme zložením dvoch perspektívností $p \stackrel{A'}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} \delta \stackrel{A}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p'$.



4. Prevedením konštrukcie z predošlého príkladu dostanete to, čo sa tvrdí.

5. Vieme, že každá perspektívnosť $p \stackrel{S}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p'$ necháva bod $p \cap p'$ na mieste. Podľa predchádzajúceho príkladu môžeme usúdiť, že direkčná os δ pretne priamku p' v rovnakom bode ako ju pretína priamka p , teda všetky tri sa pretínajú v jednom bode, ako sme chceli dokázať.

Naopak, predpokladajme, že direkčná os projektívnosti $\pi: R(p) \rightarrow R(p')$ prechádza bodom $R = p \cap p'$. Nech A, B, C sú tri rôzne body priamky p a A', B', C' sú po poradí ich obrazy v projektívnosti $\pi: R(p) \rightarrow R(p')$. Označme $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $S = AA' \cap BB'$.



Uvažujme perspektívnosť $\pi': p \xrightarrow[S]{\wedge} p'$. Zrejme $\pi'(A) = A'$ a $\pi'(B) = B'$. Chceme dokázať, že platí aj $\pi'(C) = C'$, teda, že body C, C', S sú kolineárne. Potom budú π a π' zobrazovať trojicu bodov rovnakým spôsobom a teda podľa základnej vety sa budú rovnať.

Kolinearitu bodov možno dokázať použitím duálnej Desargovej vety pre $\triangle AB'C$ a $\triangle A'BC'$ alebo pomocou Desargovej vety pre $\triangle AA'Q$ a $\triangle B'BR$.

6. Spravme to pre nasledovnú polohu bodov (zvyšné situácie sa vyriešia rovnako).



Ak by táto projektívnosť mala samodružný bod X , vyšetrením všetkých možných polôh bodu X vždy dospejeme k sporu.

Predpokladajame, že samodružný bod X by ležal na tejto časti priamky.



Dvojice (A, B) a (C, X) sa oddeľujú, ale ich obrazy (B, C) a (A, X) nie.

Predpokladajame, že samodružný bod X by ležal na tejto časti priamky.



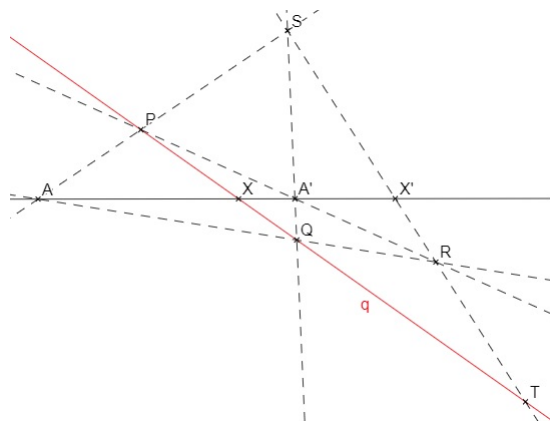
Dvojice (A, B) a (C, X) sa neoddeľujú, ale ich obrazy (B, C) a (A, X) áno.

Predpokladajame, že samodružný bod X by ležal na tejto časti priamky.



Dvojice (A, C) a (B, X) sa oddeľujú, ale ich obrazy (B, A) a (C, X) nie. Táto projektívnosť nemôže mať samodružný bod a je teda eliptická.

7. Predpokladajme, že involúcia $\pi: R(p) \rightarrow R(p)$ má vratnú dvojicu (A, A') a samodružný bod X . Nájdeme ďalší samodružný bod. Zvoľme priamku q prechádzajúcu bodom X a bod S neležiaci na p, q a pomocou nich štandardne skonštruujeme bod X' tak, aby $H(A, A'; X, X')$. Označme navyše $T = SR \cap q$ tak ako je to na obrázku.



Uvažujme perspektívnosti $\pi_1: p \xrightarrow[S]{S} q$ a $\pi_2: q \xrightarrow[p]{R} p$. Platí

$$\begin{array}{ll} \pi_1(A) = P, & \pi_2(P) = A', \\ \pi_1(A') = Q, & \pi_2(Q) = A, \\ \pi_1(X) = X, & \pi_2(X) = X, \end{array}$$

Potom projektívnosť $\pi_2 \circ \pi_1$ zobrazuje body A, A', X postupne na A', A, X . Podľa základnej vety to ale znamená, že $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$.

Ukážeme, že X' je samodružný bod involúcie π . Bod X' sa v perspektívnosti π_1 zobrazí na bod T . Bod T sa v perspektívnosti π_2 zobrazí na bod X' . Teda $\pi(X') = \pi_2 \circ \pi_1(X') = X'$, ako sme chceli.

7 Riešenia

1. Keďže U_∞^a je nevlastný bod, dvojpomer $(A_0BCU_\infty^a)$ vypočítame ako deliaci pomer (A_0BC) . Vektory $\overrightarrow{A_0C}$ a $\overrightarrow{BC}$ majú rovnakú orientáciu a pomer ich dĺžok je $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, teda $(A_0BCU_\infty^a) = \frac{1}{2}$.

Uvedená štvorica bodov sa v perspektívnosti π zobrazí na štvoricu T, C_0, C, X . Preto platí

$$(TC_0CX) = \frac{(TC_0C)}{(TC_0X)} = \frac{1}{2}.$$

Z obrázka zistíme, že $(TC_0C) = \frac{2}{3}$. To znamená, že $(TC_0X) = \frac{4}{3}$.

Keďže deliaci pomer (TC_0X) je kladný, bod X leží na Euklidovskej polpriamke TC_0 . Pre dĺžky úsečiek TX a C_0X má platiť

$$\frac{|TX|}{|C_0X|} = (TC_0X) = \frac{4}{3}.$$

Dosadením $|C_0X| = |TX| - 1$ dostaneme $|TX| = 4$.

2. Zo zadania a vety 7.12 máme $(ABCD) = (ACBE) = -1$. Podľa tvrdenia 7.11 d) platí $(ABCE) = 1 - (ACBE) = 2$. Teda

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1, \quad \frac{(ABC)}{(ABE)} = 2.$$

Počítajme dvojpomer $(ABDE)$.

$$(ABDE) = \frac{(ABD)}{(ABE)} = \frac{(ABD)(ABC)}{(ABE)(ABC)} = \frac{(ABD)}{(ABC)} \cdot \frac{(ABC)}{(ABE)} = \frac{1}{-1} \cdot 2 = -2.$$

3. Označme $(XYAA') = \lambda$. Keďže involúcia π má vratnú dvojicu (A, A') a ako každá projektívnosť zachováva dvojpomer, tak platí aj $(XYA'A) = \lambda$.

Vieme, že všetky štyri body sú rôzne (nemôže platiť $A = A'$, lebo potom by π bola identita a nie hyperbolická involúcia) a preto $\lambda \neq 0, 1$. Podľa tvrdenia 7.11 b) musí platiť

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\lambda}, \\ \lambda^2 &= 1, \\ \lambda^2 - 1 &= 0, \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Teda $\lambda = -1$, čo znamená, že body X, Y, A, A' tvoria harmonickú štvoricu.

4. Vyplyva z vety o obvodovom uhle a definicie dvoj pomeru styroch vlastnych priamok.

5. Využitím predchádzajúceho príkladu a tvrdenia 7.5 pre priamky DP, DA, DC, DQ a BP, BA, BC, BQ dostaneme, že dvoj pomery priesečníkov oboch štvoríc priamok s priamkou PQ sa rovnajú, teda $(PYRQ) = (PRXQ)$. Rozpísané podrobne podľa vzťahu (7.2) dostaneme

$$\frac{|PR||YQ|}{|YR||PQ|} = \frac{|PX||RQ|}{|RX||PQ|}.$$

Vynásobením oboch strán rovnice $|PQ|$ upravíme na tvar

$$\frac{|PR||YQ|}{|YR|} = \frac{|PX||RQ|}{|RX|}.$$

Podľa zadania $|PR| = |RQ|$ a môžeme obe strany vydeliť týmto číslom

$$\frac{|YQ|}{|YR|} = \frac{|PX|}{|RX|}.$$

Teda máme rovnosť deliacich pomerov $(QRY) = (PRX)$.

Využitím tvrdenia 7.2 e) dostaneme aj $(YQR) = (XPR)$, z čoho

$$\frac{|YR|}{|QR|} = \frac{|XR|}{|PR|}.$$

Keďže $|QR| = |PR|$, tak musí platiť aj $|YR| = |XR|$, čo sme mali dokázať.