

Projektívna geometria

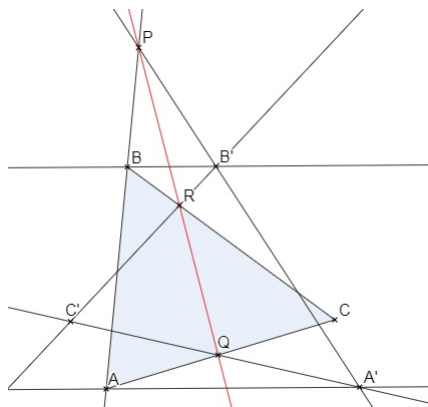
4 Riešenia

3. V rovine sú dané dve rovnobežky a, b a bod C mimo nich. Zostrojte tretiu rovnobežku prechádzajúcu bodom C .

Chceme skonštruovať priamku c prechádzajúcu bodom C , ktorá bude konkurentná s a, b (všetky sa pretnú v jednom nevlastnom bode). Nech $A, A' \in a$, $B, B' \in b$ sú páry rôznych bodov.

Na určenie priamky c stačí určiť bod C' taký, že $AA' \cap BB' \cap CC'$ je jeden bod. To pripomína tvrdenie Desargovej vety pre $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$. Pre dané body musí teda platiť aj to, že body $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ a $R = BC \cap B'C'$ sú kolineárne.

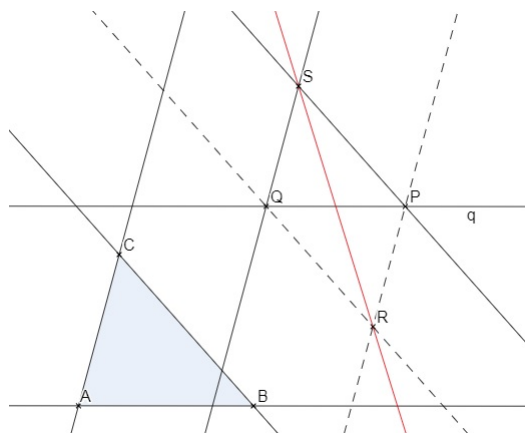
To nám dáva návod na konštrukciu bodu C' . Pomocou zvolených bodov A, A', B, B' určíme bod P a týmto bodom preložíme priamku p . Označme $Q = AC \cap p$ a $R = BC \cap p$. Bod C' nájdeme ako $C' = A'Q \cap B'R$.



4. Daný je trojuholník $\triangle ABC$. Nech $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ sú po poradí nevlastné body priamok BC, AC, AB . Určte štvrtý harmonický bod D_∞ , teda taký bod, aby platilo $H(A_\infty, B_\infty; C_\infty, D_\infty)$.

Postupujme klasickým spôsobom. Zvoľme bod S neležiaci na žiadnej z priamok a preložíme bodom C_∞ nejakú priamku q ním neprechádzajúcu, t.j. priamku rovnobežnú s AB neprechádzajúcu S . Zostrojme $P = SA_\infty \cap q$ a

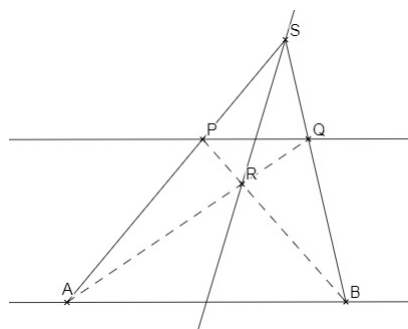
$Q = SB_{\infty} \cap q$ ako priesečníky rovnobežiek s priamkami BC, AC vedených bodom S a priamky q . Podobne, nech $R = A_{\infty}Q \cap B_{\infty}P$.



Hľadaný bod D_{∞} je potom priesečník priamky SR s nevlastnou priamkou.

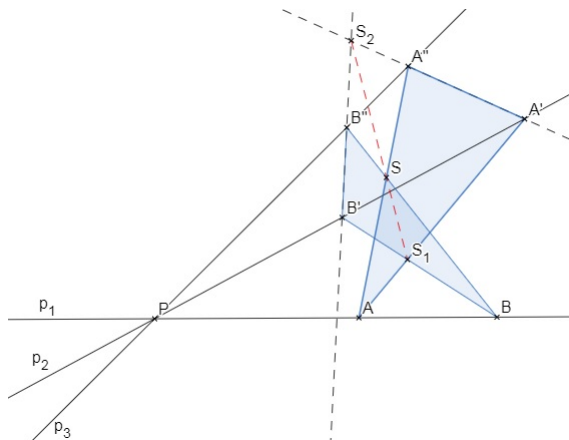
5. V rovine sú dané rôzne nekolineárne body A, B, S a priamka q rovnobežná s AB neprechádzajúca S . Bez merania, len s použitím lineára (pravítka) zostrojte stred úsečky AB . Viete to spraviť aj bez narysovania priamky AB ?

Stačí uvedomiť si, že pre nevlastný bod U_{∞}^{AB} priamky AB je štvrtý harmonický bod k trojici A, B, U_{∞}^{AB} práve stred Euklidovskej úsečky AB . Na jeho konštrukciu môžeme použiť uvedený bod S a priamku q , ktorá zo zadania prechádza bodom U_{∞}^{AB} .



6. Nech sú dané tri rôzne konkurentné priamky p_1, p_2, p_3 (všetky prechádzajú jedným bodom P) a dve perspektívnosti $\pi_1: R(p_1) \rightarrow R(p_2)$ so stredom S_1 a $\pi_2: R(p_2) \rightarrow R(p_3)$ so stredom S_2 . Pomocou Desargovej vety dokážte, že projektívnosť $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ je tiež perspektívnosť. Aká je poloha stredov S perspektívnosti π a stredov S_1, S_2 ?

Nech A, B sú rôzne body na priamke p_1 , $A', B' \in p_2$ sú ich obrazy v perspektívnosti π_1 a $A'', B'' \in p_3$ sú obrazy týchto bodov v perspektívnosti π_2 .



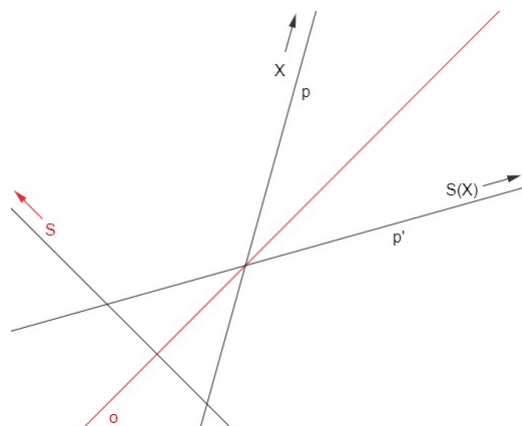
Trojuholníky $\triangle AA'A''$, $\triangle BB'B''$ spĺňajú $AB \cap A'B' \cap A''B'' = P$ a podľa Desargovej vety musia byť body $S_1 = AA' \cap BB'$, $S_2 = A'A'' \cap B'B''$ a $S = AA'' \cap BB''$ kolíneárne.

To ale znamená, že dvojice bodov A, A'' a B, B'' si zodpovedajú v perspektívnosti π so stredom S .

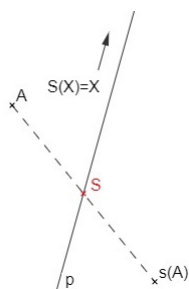
5 Riešenia

1. a) Nech $s: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ je osová súmernosť podľa priamky o . Ak toto zobrazenie chceme rozšíriť na kolíneáciu $S: \bar{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_2$ potrebujeme každému nevlastnému bodu X priradiť jeho obraz $S(X)$.

Nech X je nevlastný bod priamky p . Aby S bola kolíneácia, tak $S(X)$ musí ležať na priamke $p' = s(p)$. Pretože vlastné body priamky p' sa zobrazujú na vlastné body a S je bijekcia, tak $S(X)$ musí byť nevlastný bod priamky p' . Zrejme o je os kolíneácie S . Ako určíme stred? Uvedomíme si, že priamky kolmé na os o sú samodružné. Spoločný priesečník všetkých takých priamok, ich nevlastný bod S , je stredom kolíneácie.

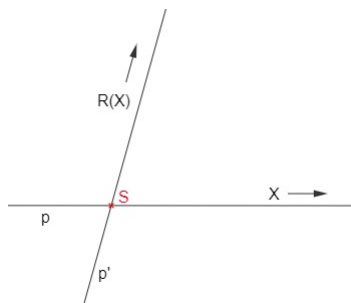


b) Nech $s: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ je stredová súmernosť so stredom S . Chceme ju rozšíriť na kolineáciu $S: \bar{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_2$. Pre ľubovoľný nevlastný bod X je priamka $p = SX$ samodružná. Rovnako ako v predchádzajúcom, nevlastný bod sa zobrazí na nevlastný bod. V tomto prípade to znamená, že $S(X) = X$ a teda každý nevlastný bod X je samodružný. Nevlastná priamka u_∞ je osou tejto kolineácie.



c) Rovnoľahlosť so stredom S je len zovšeobecnenie predošlého prípadu. Bod S bude stredom a nevlastná priamka bude osou tejto kolineácie.

d) Nech $r: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ je rotácia so stredom S o daný uhol. Pre nevlastný bod X je obraz priamky $p = SX$ v rotácii r nejaká priamka $p' = r(p)$ prechádzajúca bodom S . V rozšírení rotácie na kolineáciu $R: \bar{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_2$ teda musíme bod X zobraziť na nevlastný bod $R(X)$ priamky p' . Žiaden vlastný bod okrem bodu S nie je samodružný a s výnimkou špeciálnych prípadov ani žiaden nevlastný bod nie je samodružný. Táto kolineácia potom nemá stred ani os.



2. Návod: Nech F je stredová kolíneácia so stredmi S, S' a X je ľubovoľný bod nekolineárny s S, S' . Ako sa zobrazia priamky SX a $S'X$? Čo z toho vyplýva pre bod X ?

Ak sa všetky body rozšírenej Euklidovskej roviny okrem bodov priamky SS' zobrazujú identicky na seba, môže sa bod P tejto priamky zobrazit' na nejaký iný bod priamky SS' ?

3. Návod: Použite Desargovu vetu pre trojuholníky $\triangle XX_1X_2$ a $\triangle YY_1Y_2$.