

Projektívna geometria

9 Rovnice projektívnych kolineácií

Kolineáciám sme sa venovali už v kapitole 5, ukázali sme vtedy napríklad, že každá homológia $\mathcal{H}$ je jednoznačne určená štvoricou (S, o, A, A') (Veta 5.9). Počas dôkazu sme odvodili, že každý bod X neležiaci na o ani SA sa zobrazí nasledovne

$$\mathcal{H}(X) = [(AX \cap o) \cup A'] \cap SX$$

a každý bod B ležiaci na SA ale rôzny od S sa zobrazí s využitím pomocného bodu X neležiaceho na o ani SA a jeho obrazu $X' = \mathcal{H}(X)$ takto

$$\mathcal{H}(B) = [(BX \cap o) \cup X'] \cap SA$$

a takto získaný bod nezávisí od voľby X .

Homológia $\mathcal{H}$ je zobrazenie celej rozšírenej roviny na seba, ale pozrime sa ako sa správa, keď sa zúžime na nejakú priamku.

Homológia zúžená na os o je identické zobrazenie.

Homológia zúžená na priamku $p \neq o, SA$ je perspektívnosť so stredom S z priamky p na priamku p' , ktorých priesečník $p \cap p'$ leží na osi.

Homológia zúžená na priamku $s = SA$ je projektívnosť $s \xrightarrow{\wedge} \frac{X}{\wedge} o \xrightarrow{\wedge} \frac{X'}{\wedge} s$.

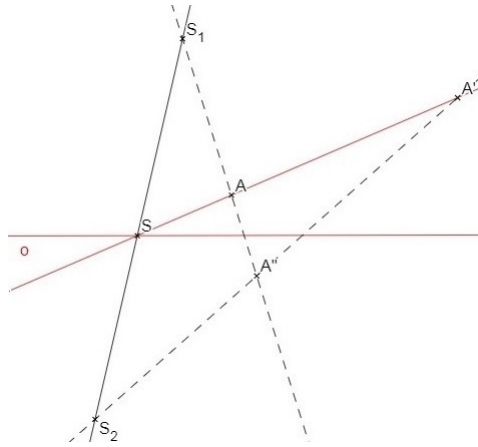
To nás privádza k nasledujúcej definícii.

Definícia 9.1. Nech $\phi: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ je kolineácia a pre ľubovoľnú priamku p je zúžené zobrazenie $\phi|_p: p \rightarrow \phi(p)$ projektívnosťou. Zobrazenie ϕ potom nazývame projektívna kolineácia.

Homológie a vďaka nasledujúcej vete aj elácie sú príklady projektívnych kolineácií.

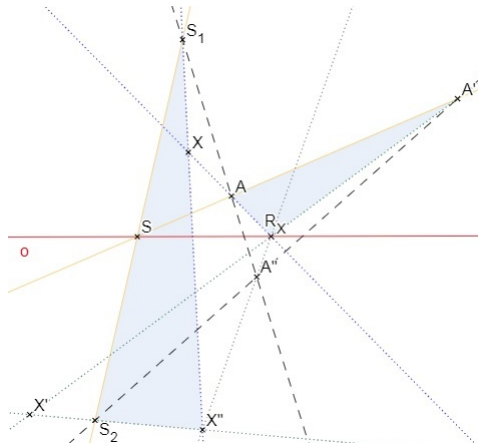
Veta 9.2. Nech S, A, A' sú rôzne kolineárne body a o je priamka prechádzajúca S , ale nie A . Potom existuje jediná elácia $\mathcal{E}$ so stredom S a osou o taká, že $\mathcal{E}(A) = A'$. Navyše $\mathcal{E}$ vieme vyjadriť ako zloženie dvoch homológií s osou o .

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľný bod S_1 neležiaci na o ani SA . Nech A'' je nejaký bod na priamke S_1A rôzny od obidvoch a neležiaci na osi o . Označme bod $S_2 = SS_1 \cap A'A''$.



Nech homológie $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ sú určené $\mathcal{H}_1(S_1, o, A, A'')$ a $\mathcal{H}_2(S_2, o, A'', A')$. Zložené zobrazenie $\mathcal{E} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ je potom osová kolíneácia s osou o a platí $\mathcal{E}(A) = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(A) = A'$. Ukážeme, že S je silne samodružný bod tejto kolíneácie a teda jej stred.

Bod S leží na osi o a je preto samodružným bodom kolíneácie $\mathcal{E}$. Samotná os o je samodružná. Keďže $\mathcal{E}(A) = A'$ a body S, A, A' sú kolíneárne, priamka SA je samodružná. Priamka S_1S_2 je samodružná priamka oboch homológií $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ lebo prechádza ich stredmi. Zvoľme bod X neležiaci na žiadnej z týchto troch priamok.



Označme $R_X = AX \cap o$, $X'' = R_X A'' \cap S_1 X$ a $X' = R_X A' \cap S_2 X''$. Platí teda $\mathcal{H}_1(X) = X''$ a $\mathcal{H}_2(X'') = X'$. Pre trojuholníky $\triangle S_1 S_2 X''$ a $\triangle A A' R_X$ platí $S_1 A \cap S_2 A' \cap X'' R_X = A''$ a podľa Desargovej vety sú potom body

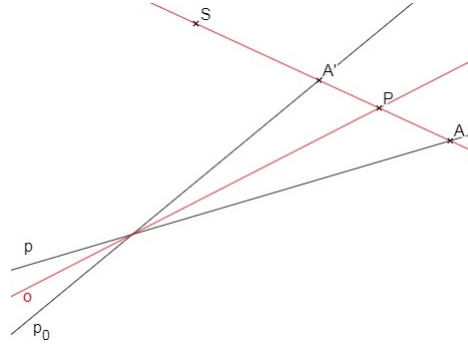
$S = S_1 S_2 \cap AA'$, $X = S_1 X'' \cap AR_X$ a $X' = S_2 X'' \cap A'R_X$ kolineárne. Priamka SX je teda tiež samodružná priamka kolineácie $\mathcal{E}$. Týmto sme ukázali, že S je stredom kolineácie $\mathcal{E}$.

Jednoznačnosť. Nech $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{E}_2$ sú dve elácie spĺňajúce podmienky vety. Potom $\mathcal{E}_2^{-1} \circ \mathcal{E}_1$ je kolineácia so stredom S a osou o , pričom bod A je jej samodružným bodom. Nech $a \in Z(A)$ je ľubovoľná priamka. Bod $A_0 = a \cap o$ bude samodružný lebo leží na osi. Potom ale priamka a obsahuje dva samodružné body a je preto sama samodružná. Keďže priamka a bola zvolená ľubovoľne, tak sme týmto dokázali, že bod A je stredom. Kolineácia s dvoma rôznymi stredmi musí byť identita, t.j. $\mathcal{E}_2^{-1} \circ \mathcal{E}_1 = id$, čo ale znamená, že $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$. $\square$

Ako dôsledok dostaneme, že elácie sú zloženia projektívnych kolineácií a sú teda tiež projektívne kolineácie. Pre všeobecné kolineácie máme nasledujúce jednoduché kritérium.

Tvrdenie 9.3. *Nech ϕ je kolineácia. Ak pre priamku p_0 je zúžené zobrazenie $\phi|_{p_0}: p_0 \rightarrow \phi(p_0)$ projektívnosť, tak ϕ je projektívna kolineácia.*

Dôkaz. Ukážeme, že pre každú priamku p je zúžené zobrazenie $\phi|_p: p \rightarrow \phi(p)$ projektívnosť. Nech p je ľubovoľná priamka rôzna od p_0 . Zvoľme body S, P neležiace na p, p_0 a označme $A = SP \cap p$, $A' = SP \cap p_0$ a $o = (p \cap p_0) \cup P$.



Homológia $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S, o, A, A')$ zobrazuje priamku p na p_0 , pričom zúženie $\mathcal{H}|_p$ je perspektívnosť $p \xrightarrow[S]{\mathcal{H}} p_0$. Pre ľubovoľný bod X na priamke p a jeho obraz $X' = \mathcal{H}(X)$ platí, že body X, X', S sú kolineárne. Kolineácia ϕ ich preto zobrazí opäť na kolineárnu trojicu bodov $\phi(X), \phi(X'), \phi(S)$. Označme $\psi = \phi \circ \mathcal{H} \circ \phi^{-1}$ a uvažujme zúženie tejto kolineácie na priamku $\phi(p)$ ako znázorňuje diagram

$$\begin{array}{ccc}
p & \xrightarrow{\mathcal{H}} & p_0 \\
\downarrow \phi & & \downarrow \phi \\
\phi(p) & \xrightarrow{\psi} & \phi(p_0)
\end{array}$$

Pre každý bod Y na priamke $\phi(p)$ existuje bod $X \in p$ taký, že $Y = \phi(X)$. Čo je potom $\psi(Y)$? Máme

$$\psi(Y) = \psi(\phi(X)) = (\phi \circ \mathcal{H} \circ \phi^{-1})(\phi(X)) = \phi(\mathcal{H}(X)) = \phi(X').$$

Lenže $Y = \phi(X)$, $\psi(Y) = \phi(X')$ a $\phi(S)$ sú vždy kolineárne. To znamená, že zúžené zobrazenie $\psi|_{\phi(p)}: \phi(p) \rightarrow \phi(p_0)$ je perspektívnosť so stredom $\phi(S)$. Spodná šípka v diagrame je preto perspektívnosť. Šípka vpravo je projektívnosť podľa predpokladov a horná šípka je perspektívnosť, pretože homológia $\mathcal{H}$ bola tak skonštruovaná.

Ľavá šípka, teda zúžené zobrazenie $\phi|_p: p \rightarrow \phi(p)$ je zloženie perspektívnosti so stredom S , projektívnosti $\phi|_{p_0}$ a perspektívnosti so stredom $\phi(S)$. Teda aj $\phi|_p$ je projektívnosť tak ako sme chceli. $\square$

Nasledujúca veta je dôvodom prečo budeme uvažovať práve projektívne kolineácie.

Veta 9.4. *Nech A, B, C, D sú rôzne body, pričom žiadne tri z nich nie sú kolineárne. Potom projektívna kolineácia $\phi: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ je jednoznačne určená obrazmi týchto štyroch bodov.*

Dôkaz. Predpokladajme, že projektívne kolineácie ϕ_1 a ϕ_2 zobrazujú uvedenú štvoricu bodov rovnako. Potom v projektívnej kolineácii $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ sú body A, B, C, D samodružné. Potom ale priamky $p = AC$ a $q = BD$ sú tiež samodružné a podľa predpokladu rôzne. Označme $P = p \cap q$. Bod P sa zobrazí do bodu $\phi(p) \cap \phi(q) = p \cap q = P$.

Na priamke p ležia samodružné body A, P, C . Podľa základnej vety je projektívnosť $\phi|_p: R(p) \rightarrow R(p)$ nutne identitou. To znamená, že p je silne samodružná priamka projektívnej kolineácie ϕ , teda je jej osou. Rovnako ale máme tri samodružné body B, P, D na priamke q a tá teda musí byť tiež osou. Kolineácia ϕ s dvoma rôznymi osami je nutne identita, z čoho vyplýva $\phi_1 = \phi_2$. $\square$

Sme pripravení popísať rovnice projektívnych kolineácií. Nech

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je matica s nenulovým determinantom. Definujme zobrazenie $\phi_M: \bar{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_2$, ktoré každému bodu X so súradnicami $(x_0 : x_1 : x_2)$ priradí bod $X' = \phi_M(X)$ určený súradnicami $(x'_0 : x'_1 : x'_2)$ nasledovne

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Rôzne body X, Y, Z so súradnicami po poradí $(x_0 : x_1 : x_2)$, $(y_0 : y_1 : y_2)$, $(z_0 : z_1 : z_2)$ sú kolineárne práve vtedy keď determinant

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

je nulový.

Príslušný determinant pre súradnice obrazov týchto bodov v zobrazení ϕ je

$$\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

To znamená, že ak pôvodné body X, Y, Z boli kolineárne, tak tento determinant je rovný $|M| \cdot 0 = 0$ a teda aj obrazy týchto bodov sú kolineárne. Zobrazenie ϕ_M je preto kolineácia.

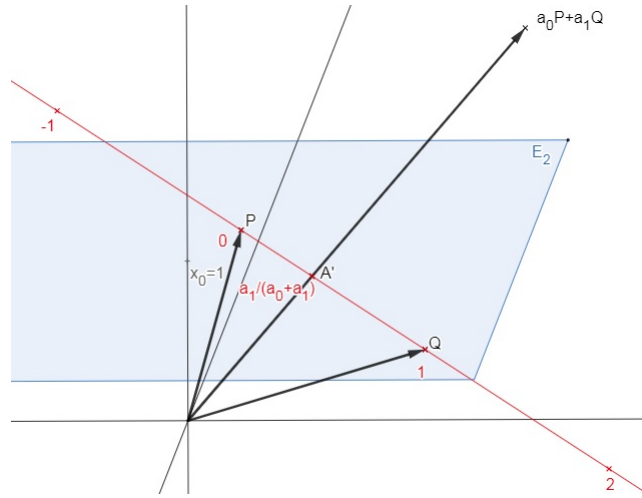
Ukážeme, že je aj projektívna kolineácia. Podľa tvrdenia 9.3 stačí nájsť jednu priamku p_0 pre ktorú bude $\phi_M|_{p_0}$ projektívnosť. Uvažujme priamku p_0 danú rovnicou $x_2 = 0$ a štyri rôzne body $A = (a_0 : a_1 : 0)$, $B = (b_0 : b_1 : 0)$, $C = (c_0 : c_1 : 0)$, $D = (d_0 : d_1 : 0)$ na nej. Ich obrazy v kolineácii budú ležať na priamke PQ , kde body P a Q majú súradnice $(a : d : g)$ a $(b : e : h)$ (sú to obrazy bodov priamky p_0 so súradnicami $(1 : 0 : 0)$ a $(0 : 1 : 0)$).

Predpokladajme najskôr, že $a_0 + a_1, b_0 + b_1, c_0 + c_1, d_0 + d_1 \neq 0$.

Bod $A' = \phi_M(A)$ má súradnice, ktoré môžeme vyjadriť $a_0P + a_1Q$, alebo vďaka homogenite aj ako

$$\frac{a_0}{a_0 + a_1}P + \frac{a_1}{a_0 + a_1}Q = P + \frac{a_1}{a_0 + a_1}(Q - P)$$

Ak na priamke $\phi(p)$ zavedieme nehomogénne súradnice, tak aby súradnice P, Q boli 0, 1, tak bod A' má potom súradnicu $\frac{a_1}{a_0+a_1}$.



Podobným spôsobom určíme súradnice $B' = \phi(B)$, $C' = \phi(C)$ a $D' = \phi(D)$ a môžeme vypočítať dvoj pomer

$$\begin{aligned} (A'B'C'D') &= \frac{\frac{c_1}{c_0+c_1} - \frac{a_1}{a_0+a_1}}{\frac{c_1}{c_0+c_1} - \frac{b_1}{b_0+b_1}} \cdot \frac{\frac{d_1}{d_0+d_1} - \frac{b_1}{b_0+b_1}}{\frac{d_1}{d_0+d_1} - \frac{a_1}{a_0+a_1}} \\ &= \frac{c_1(a_0 + a_1) - a_1(c_0 + c_1)}{c_1(b_0 + b_1) - b_1(c_0 + c_1)} \cdot \frac{d_1(b_0 + b_1) - b_1(d_0 + d_1)}{d_1(a_0 + a_1) - a_1(d_0 + d_1)} \\ &= \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{b_0c_1 - b_1c_0} \cdot \frac{b_0d_1 - b_1d_0}{a_0d_1 - a_1d_0} \\ &= (ABCD) \end{aligned}$$

V prípade, že pre jeden z bodov A, B, C, D , napríklad D platí $d_0 + d_1 = 0$

budeme dvojpomer $(A'B'C'D')$ počítať podľa vzorca (7.6)

$$\begin{aligned}
(A'B'C'D') &= (A'B'C') = \frac{\frac{c_1}{c_0+c_1} - \frac{a_1}{a_0+a_1}}{\frac{c_1}{c_0+c_1} - \frac{b_1}{b_0+b_1}} \\
&= \frac{c_1(a_0+a_1) - a_1(c_0+c_1)}{c_1(b_0+b_1) - b_1(c_0+c_1)} \cdot \frac{b_0+b_1}{a_0+a_1} \\
&= \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{b_0c_1 - b_1c_0} \cdot \frac{b_0+b_1}{a_0+a_1} \cdot \frac{d_1}{d_1} \\
&= \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{b_0c_1 - b_1c_0} \cdot \frac{b_0d_1 + b_1d_1}{a_0d_1 + a_1d_1} \\
&= \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{b_0c_1 - b_1c_0} \cdot \frac{b_0d_1 - b_1d_0}{a_0d_1 - a_1d_0} \\
&= (ABCD),
\end{aligned}$$

kde v predposlednom kroku sme využili, že $d_1 = -d_0$ podľa predpokladu.

V každom prípade vyšlo, že $\phi_M|_{p_0}$ zachováva dvojpomer a je preto projektívna kolíneácia.

Veta 9.5. *Pre každú projektívnu kolíneáciu ϕ existuje matica $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ s nenulovým determinantom taká, že pre každý bod $X \in \bar{\mathbb{E}}_2$ so súradnicami $(x_0 : x_1 : x_2)$ sú súradnice jeho obrazu $X' = \phi(X)$ dané*

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Nech A, B, C, D sú rôzne body a žiadne tri z nich nie sú kolíneárne so súradnicami $(a_0 : a_1 : a_2)$, $(b_0 : b_1 : b_2)$, $(c_0 : c_1 : c_2)$, $(d_0 : d_1 : d_2)$. Nech súradnice ich obrazov A', B', C', D' sú $(a'_0 : a'_1 : a'_2)$, $(b'_0 : b'_1 : b'_2)$, $(c'_0 : c'_1 : c'_2)$, $(d'_0 : d'_1 : d'_2)$.

Pre nenulové čísla $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ súradnice $(\lambda a'_0 : \lambda a'_1 : \lambda a'_2)$, $(\lambda' b'_0 : \lambda' b'_1 : \lambda' b'_2)$, $(\lambda'' c'_0 : \lambda'' c'_1 : \lambda'' c'_2)$, $(\lambda''' d'_0 : \lambda''' d'_1 : \lambda''' d'_2)$ vďaka homogenite tiež reprezentujú tie isté body A', B', C', D' .

Pokúsme sa nájsť nejakú maticu $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ takú, že zobrazenie ϕ_M zobrazí postupne A, B, C, D na A', B', C', D' . Riešime teda homogénnu

sústavu 12 rovníc s 13 neznámymi . Keďže je viac neznámych ako rovníc bude existovať aspoň jedno nenulové riešenie z ktorého odčítame nejakú maticu M takú, že zobrazenie ϕ_M spĺňa $\phi_M(A) = A'$, $\phi_M(B) = B'$, $\phi_M(C) = C'$, $\phi_M(D) = D'$.

Podľa predchádzajúceho rozboru zobrazenie ϕ_M je projektívna kolineácia.

Podľa vety 9.4 potom vyplýva, že nutne $\phi_M = \phi$.

Determinant matice M je nenulový, lebo každá projektívna kolineácia je bijekcia. $\square$