

Projektívna geometria

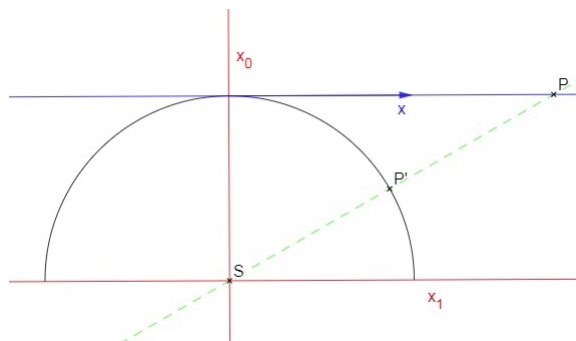
8 Rovnice projektívností

V predošlej kapitole sme odvodili, že projektívnosti sú práve zobrazenia zachovávajúce dvojpomer. Kombináciou poznatkov o homogénnych súradniciach a tohto faktu dospejeme ku rovniciam projektívnych zobrazení.

Začneme tým, že pre body na danej priamke v rozšírenej Euklidovej rovine zavedieme homogénne súradnice. Proces bude úplne analogický ako pri zavedení homogénnych súradníc $(x_0 : x_1 : x_2)$ v $\bar{\mathbb{E}}_2$, len z celého uvažovania si odmyslíme súradnicu x_2 .

Pomocou nehomogénnych súradníc vieme každý vlastný bod P priamky popísať jeho jednou súradnicou x (modrá priamka na obrázku). Každý taký bod P určuje priamku prechádzajúcu počiatkom S v rovinovej súradnicovej sústave. Súradnice (x_0, x_1) ľubovoľného bodu na tejto priamke rôzneho od S budú predstavovať pár homogénnych súradníc bodu P . Bod P samotný má z pohľadu roviny súradnice $(1, x)$. Súradnice zvyšných bodov priamky ním určenej priamky sú tvaru $(\lambda, \lambda x)$. Homogénne súradnice bodu P sú trieda súradníc

$$(1 : x) = \{(\lambda, \lambda x) : \lambda \neq 0\}.$$



Pre vlastné body vzťah medzi homogénnymi súradnicami $(x_0 : x_1)$ a nehomogénnou súradnicou x je

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad (8.1)$$

Súradnice nevlastného bodu sú zrejme $(0 : x_1)$ pre ľubovoľné $x_1 \neq 0$.

Môžeme teraz analyticky vyjadriť dvojpomer štyroch kolineárnych bodov A, B, C, D na priamke p určených súradnicami a, b, c, d v tomto poradí. Predpokladajme zatiaľ, že všetky body sú vlastné a opačný prípad vyšetříme neskôr. Deliaci pomer (ABC) je také číslo λ_C , že $\overrightarrow{AC} = \lambda_C \overrightarrow{BC}$. Vzhľadom na dané súradnice je teda

$$(ABC) = \lambda_C = \frac{c - a}{c - b}$$

Podobne odvodíme vzťah pre deliaci pomer (ABD) a pre dvojpomer dostaneme vzťah

$$(ABCD) = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a} \quad (8.2)$$

Chceme však tento vzťah napísať pomocou homogénnych súradníc. K tomu využijeme determinanty. Determinant pre maticu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ a zapisujeme

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Jedna z vlastností determinantu je, že ak v matici A vynásobíme nejaký riadok číslom λ , hodnota determinantu sa zmení nasledovne

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

S využitím toho môžeme (8.2) prepísať

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix}} \quad (8.3)$$

Riadky v maticiach vystupujúcich v tomto vzťahu sú homogénne súradnice $(1 : a)$, $(1 : b)$, $(1 : c)$ a $(1 : d)$ bodov A, B, C, D .

Presvedčte sa, že ak ako homogénne súradnice bodov A, B, C, D dosadíte $(\lambda_1 : \lambda_1 a)$, $(\lambda_2 : \lambda_2 b)$, $(\lambda_3 : \lambda_3 c)$, $(\lambda_4 : \lambda_4 d)$ tak dvojpomer vypočítaný z týchto súradníc podľa vzťahu (8.3) vyjde rovnako, t.j. že platí

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 a \\ \lambda_3 & \lambda_3 c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 b \\ \lambda_3 & \lambda_3 c \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 b \\ \lambda_4 & \lambda_4 d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 a \\ \lambda_4 & \lambda_4 d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix}}$$

Tiež si uvedomte, že do vzťahu (8.3) možno dosadiť aj súradnice nevlastného bodu. Ak je jeden z bodov nevlastný, napríklad D , ako jeho súradnice môžeme zobrať $(0 : x_1)$ pre ľubovoľné $x_1 \neq 0$ a výpočet prebehne takto

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{x_1}{x_1} = \frac{c-a}{c-b} = (ABC),$$

čo je v súlade so vzťahom pre dvojpomer štyroch bodov pre nevlastný bod D . Celé to môžeme zhrnúť nasledovne.

Dôsledok 8.1. *Nech A, B, C, D sú kolineárne body s homogénnymi súradnicami $(a_0 : a_1)$, $(b_0 : b_1)$, $(c_0 : c_1)$ a $(d_0 : d_1)$. Potom pre ich dvojpomer platí*

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}.$$

Vďaka tomuto vyjadrenie dojpomeru štyroch kolineárnych bodov pomocou ich homogénnych súradníc môžeme vyšetriť, ktoré rovnice budú zodpovedať projektívnym zobrazeniam.

Nech $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je matica s nenulovým determinantom $ad - bc \neq 0$.

Uvažujme zobrazenie $\pi_M: R(p) \rightarrow R(p)$, ktoré každému bodu X so súradnicami $(x_0 : x_1)$ priradí bod $X' = (x'_0 : x'_1)$ nasledovne

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

teda

$$x'_0 = ax_0 + bx_1, \quad (8.4)$$

$$x'_1 = cx_0 + dx_1. \quad (8.5)$$

Výpočtom overíme, že pre ľubovoľnú štvoricu rôznych bodov A, B, C, D a ich obrazy A', B', C', D' v zobrazení π_M platí $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Nech tak ako v Dôsledku 8.1 sú $(a_0 : a_1)$, $(b_0 : b_1)$, $(c_0 : c_1)$ a $(d_0 : d_1)$ homogénne súradnice bodov A, B, C, D . Budeme tiež uvažovať nasledujúce

matice

$$\begin{aligned} M_{AC} &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix} & M_{BD} &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} \\ M_{BC} &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix} & M_{AD} &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a matice prislúchajúce obrazom A', B', C', D' s homogénnymi súradnicami $(a'_0 : a'_1)$, $(b'_0 : b'_1)$, $(c'_0 : c'_1)$ a $(d'_0 : d'_1)$

$$\begin{aligned} M_{A'C'} &= \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 \\ c'_0 & c'_1 \end{pmatrix} & M_{B'D'} &= \begin{pmatrix} b'_0 & b'_1 \\ d'_0 & d'_1 \end{pmatrix} \\ M_{B'C'} &= \begin{pmatrix} b'_0 & b'_1 \\ c'_0 & c'_1 \end{pmatrix} & M_{A'D'} &= \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 \\ d'_0 & d'_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pre dvojicu A, C a ich obrazy A', C' podľa predpisu zobrazenia π_M platí

$$\begin{aligned} a'_0 &= aa_0 + ba_1, & a'_1 &= ca_0 + da_1, \\ c'_0 &= ac_0 + bc_1, & c'_1 &= cc_0 + dc_1, \end{aligned}$$

čo možno skrátené zapísať

$$M_{A'C'} = M_{AC} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Analogický vzťah platí pre každú z uvedených štyroch matíc. Dostaneme preto

$$(A'B'C'D') = \frac{|M_{A'C'}|}{|M_{B'C'}|} \cdot \frac{|M_{B'D'}|}{|M_{A'D'}|} = \frac{\left| M_{AC} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|}{\left| M_{BC} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|} \cdot \frac{\left| M_{BD} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|}{\left| M_{AD} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|}.$$

Z vlastností determinantov vyplýva, že tento výraz je rovný

$$\frac{|M_{AC}| \cdot |M|}{|M_{BC}| \cdot |M|} \cdot \frac{|M_{BD}| \cdot |M|}{|M_{AD}| \cdot |M|},$$

z čoho vykrátením $|M| = ac - bd \neq 0$ dostaneme

$$(A'B'C'D') = \frac{|M_{AC}|}{|M_{BC}|} \cdot \frac{|M_{BD}|}{|M_{AD}|} = (ABCD),$$

ako sme chceli.

Veta 8.2. Pre každé projektívne zobrazenie $\pi: R(p) \rightarrow R(p)$ existuje matica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s nenulovým determinantom taká, že pre každý bod $X \in p$ so súradnicami $(x_0 : x_1)$ sú súradnice jeho obrazu $X' = \pi(X)$ dané

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Nech X, Y, Z sú rôzne body na priamke p so súradnicami $(x_0 : x_1)$, $(y_0 : y_1)$ a $(z_0 : z_1)$. Nech súradnice obrazov X', Y', Z' sú $(x'_0 : x'_1)$, $(y'_0 : y'_1)$ a $(z'_0 : z'_1)$.

Pre nenulové čísla $\lambda, \lambda', \lambda''$ súradnice $(\lambda x'_0 : \lambda x'_1)$, $(\lambda' y'_0 : \lambda' y'_1)$ a $(\lambda'' z'_0 : \lambda'' z'_1)$ vďaka homogenite tiež reprezentujú tie isté body X', Y', Z' .

Pokúsme sa nájsť nejakú maticu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ takú, že zobrazenie π_M určené rovnicami (8.4) a (8.5) zobrazí postupne X, Y, Z na X', Y', Z' . Hľadáme teda také $a, b, c, d, \lambda, \lambda', \lambda''$ aby platilo

$$\begin{aligned} \lambda x'_0 &= ax_0 + bx_1, & \lambda' y'_0 &= ay_0 + by_1, & \lambda'' z'_0 &= az_0 + bz_1, \\ \lambda x'_1 &= cx_0 + dx_1, & \lambda' y'_1 &= cy_0 + dy_1, & \lambda'' z'_1 &= cz_0 + dz_1. \end{aligned}$$

Všetky tieto rovnice tvoria jeden spoločný systém, ktorý po úprave vyzerá takto

$$\begin{array}{rcl} x_0a + x_1b & - x'_0\lambda & = 0 \\ y_0a + y_1b & - y'_0\lambda' & = 0 \\ z_0a + z_1b & - z'_0\lambda'' & = 0 \\ x_0c + x_1d - x'_1\lambda & & = 0 \\ y_0c + y_1d & - y'_1\lambda' & = 0 \\ z_0c + z_1d & - z'_1\lambda'' & = 0 \end{array}$$

Je to homogénny lineárny systém šiestich rovníc so siedmimi neznámymi $a, b, c, d, \lambda, \lambda', \lambda''$. Keďže je viac neznámych ako rovníc bude existovať aspoň jedno nenulové riešenie z ktorého odčítame nejakú maticu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

takú, že zobrazenie π_M spĺňa $\pi_M(X) = X'$, $\pi_M(Y) = Y'$ a $\pi_M(Z) = Z'$.

Podľa predchádzajúceho rozboru zobrazenie π_M zachováva dvojpomer a podľa predošlej kapitoly je preto projektívnosťou. Zo základnej vety potom vyplýva, že nutne $\pi_M = \pi$.

Ostáva už len overiť, že determinant matice M je nenulový. Dokážeme to sporom.

Predpokladajme, že $ad - bc = 0$. Nastáva práve jeden z prípadov $a = b = 0$, alebo $a = 0, b \neq 0$, alebo $a \neq 0$.

Ak $a = b = 0$, tak dostaneme $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$, čo znamená, že X', Y', Z' sú nevlastné body. Podľa predpokadu ale boli rôzne (lebo sú obrazmi rôznych bodov v projektívosti) a priamka p má len jeden nevlastný bod. Spor.

Ak $a = 0$ a $b \neq 0$, tak z rovnice $ad = bc$ dostaneme, že aj $c = 0$. Priamym výpočtom dostaneme, že

$$\frac{x'_1}{x'_0} = \frac{y'_1}{y'_0} = \frac{z'_1}{z'_0} = \frac{d}{b},$$

čo vzhľadom na (8.1) znamená, že $X' = Y' = Z'$ a opäť dostaneme spor.

Ak $a \neq 0$, tak môžeme vyjadriť $d = b \cdot \frac{c}{a}$ a následne

$$\frac{x'_1}{x'_0} = \frac{y'_1}{y'_0} = \frac{z'_1}{z'_0} = \frac{c}{a},$$

čo vedie k rovnakému sporu. □