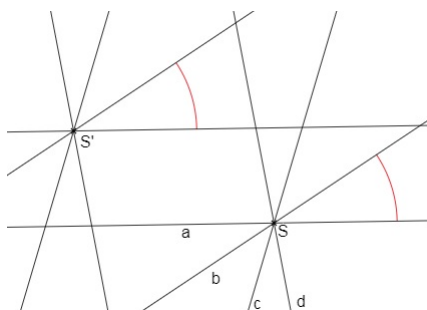


Pre štvoricu kolineárnych bodov sme definovali ich dvojpomer ak žiaden z nich alebo práve jeden z nich bol nevlastný a dokázali sme platnosť príslušných tvrdení 7.5 a 7.6. Ostáva prípad keď sú A, B, C, D nevlastné. Táto poloha má jednu výhodu. Pre ľubovoľný vlastný bod S a priamky $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$ sú všetky uhly ktoré dvojice rôznych priamok zvierajú nezávislé od polohy bodu S .



To nám dovoľuje sformulovať nasledujúcu definíciu.

Definícia 7.7. Nech A, B, C, D sú rôzne nevlastné body. Ich dvojpomer je definovaný ako dvojpomer ľubovoľnej štvorice rôznych konkurentných priamok a, b, c, d takých, že $A \in a, B \in b, C \in c$ a $D \in d$.

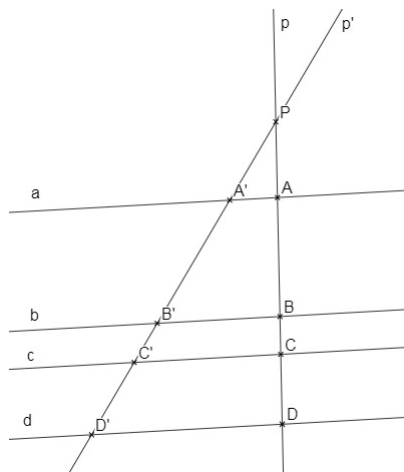
Pre ľubovoľnú štvoricu rôznych kolineárnych bodov A, B, C, D a ľubovoľný vlastný bod S vďaka tejto definícii a tvrdeniam 7.5 a 7.6 pre priamky a, b, c, d dané $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$ platí $(abcd) = (ABCD)$.

Pre úplnosť môžeme v podobnom duchu definovať dvojpomer štyroch rôznych priamok pretínajúcich sa v nejakom nevlastnom bode S . Umožňuje nám to nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 7.8. Nech a, b, c, d sú rôzne priamky pretínajúce sa v nejakom nevlastnom bode S . Pre ľubovoľné vlastné priamky p, p' neprechádzajúce S a body $A = p \cap a, B = p \cap b, C = p \cap c, D = p \cap d$ a $A' = p' \cap a, B' = p' \cap b, C' = p' \cap c, D' = p' \cap d$ je dvojpomer $(ABCD)$ rovný dvojpomeru $(A'B'C'D')$.

Dôkaz. Uvažujme najskôr prípad keď sú a, b, c, d vlastné priamky.

Ak sú p, p' totožné alebo rovnobežné, všetky vzdialenosti zodpovedajúcich si dvojíc bodov sa rovnajú a tvrdenie platí. Predpokladajme preto, že sú rôznobežné, t.j. bod $P = p \cap p'$ je vlastný.



Keďže dvojice (A, B) a (C, D) sa oddeľujú práve vtedy, keď sa dvojice priamok (a, b) a (c, d) oddeľujú, čo je práve vtedy, keď sa oddeľujú (A', B') a (C', D') , tak dvojpomery $(ABCD)$ a $(A'B'C'D')$ majú rovnaké znamienko. Počítajme podiel ich absolútnych hodnôt s využitím (7.2).

$$\frac{|(ABCD)|}{|(A'B'C'D')|} = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} \cdot \frac{|B'C'||A'D'|}{|A'C'||B'D'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|AD|} \cdot \frac{|BD|}{|B'D'|} \cdot \frac{|B'C'|}{|BC|}.$$

Z podobnosti $\triangle AA'P \sim \triangle CC'P \sim \triangle DD'P$ máme vzťahy $\frac{|CP|}{|AP|} = \frac{|C'P|}{|A'P|}$ a $\frac{|DP|}{|AP|} = \frac{|D'P|}{|A'P|}$, z ktorých odvodíme $\frac{|CP|}{|C'P|} = \frac{|AP|}{|A'P|} = \frac{|DP|}{|D'P|}$. Teda

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}.$$

Analogicky z podobnosti $\triangle BB'P \sim \triangle CC'P \sim \triangle DD'P$ dostaneme

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|}.$$

Podiel $|(ABCD)|$ a $|(A'B'C'D')|$ je teda rovný

$$\left(\frac{|AC|}{|A'C'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|AD|} \right) \cdot \left(\frac{|BD|}{|B'D'|} \cdot \frac{|B'C'|}{|BC|} \right) = 1.$$

Dôkaz pre prípad štyroch vlastných priamok je týmto ukončený.

Predpokladajme teraz, že jedna z priamok a, b, c, d je nevlastná. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to priamka d .

Body D a D' sú potom nevlastné body priamok p a p' . Veľmi podobnou úvahou, len s tým rozdielom, že použijeme vzťah (7.6) namiesto (7.2), tvrdenie dokážeme s využitím podobnosti aj v tomto prípade. $\square$

Definícia 7.9. Nech a, b, c, d sú rôzne priamky pretínajúce sa v nevlastnom bode. Ich dvojpomer je definovaný ako dvojpomer ľubovoľnej štvorice rôznych kolineárnych bodov A, B, C, D takých, že $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ a $D \in d$.

Ako bezprostredný dôsledok dostaneme nasledovnú vetu.

Veta 7.10. Každé projektívne zobrazenie zachováva dvojpomer.

Dôkaz. Vyplýva z faktu, že každá projekcia je zloženie elementárnych perspektívností, tvrdení 7.5 a 7.6, a definícií 7.7 a 7.9.

Podobne ako pre deliaci pomer, môžeme odvodiť ako sa mení dvojpomer štvorice bodov pri zmene ich poradia. Všetkých možných permutácií je príliš veľa na vypísanie, uvedieme preto len niektoré vybrané prípady pomocou ktorých sa dajú ostatné vygenerovať.

Tvrdenie 7.11. Nech A, B, C, D sú kolineárne body a pre ich dvojpomer platí $(ABCD) = \lambda$. Potom

$$a) (BACD) = \frac{1}{\lambda},$$

$$b) (ABDC) = \frac{1}{\lambda},$$

$$c) (CDAB) = \lambda,$$

$$d) (ACBD) = 1 - \lambda.$$

Dôkaz. Vďaka vete 7.10 môžeme predpokladať, že body A, B, C, D sú vlastné. Ak by neboli, vhodnou perspektívnosťou ich prevedieme na štvoricu vlastných.

Prípad a). Pomocou definície počítajme

$$(BACD) = \frac{(BAC)}{(BAD)} = \frac{\frac{1}{(ABC)}}{\frac{1}{(ABD)}} = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Prípad b).

$$(ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Prípád c). Dvojpomery $(ABCD)$ a $(CDAB)$ majú rovnaké znamienko určené tým, či sa dvojice (A, B) a (C, D) oddeľujú. Počítajme $|(CDAB)|$ pomocou vzťahu (7.2).

$$|(CDAB)| = \frac{|CA||DB|}{|DA||CB|} = \frac{|AC||BD|}{|AD||BC|} = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} = |(ABCD)|.$$

Prípád d). Označme deliace pomery $(ABC) = \alpha$ a $(ABD) = \beta$. Potom $(ABCD) = \lambda = \frac{\alpha}{\beta}$. Platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = (\alpha - 1) \overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \beta \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = (\beta - 1) \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Pomocou týchto vzťahov môžeme vyjadriť

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta - 1} \overrightarrow{AB} = \frac{\beta}{\beta - 1} \overrightarrow{AB}.$$

Podobne dostaneme

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \frac{-1}{\alpha - 1} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{\beta - 1} \overrightarrow{AB} = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \overrightarrow{AB}.$$

Pre deliaci pomer (ACD) preto dostaneme po vykrátení $(\beta - 1)$ nasledovné

$$(ACD) = \frac{\beta}{\frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}} = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}.$$

Pre deliaci pomer (ACB) platí

$$(ACB) = 1 - (ABC) = 1 - \alpha.$$

Nakoniec dvojpomer $(ACBD)$ je rovný

$$\frac{(ACB)}{(ACD)} = \frac{1 - \alpha}{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}} = \frac{-(\alpha - 1)(\alpha - \beta)}{\beta(\alpha - 1)} = \frac{\beta - \alpha}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Lenže $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ a teda $(ACBD) = 1 - \lambda$. □

S využitím vety 7.10 a tvrdenia 7.11 môžeme konečne odhaliť súvis medzi harmonickosťou a dvojpomerom.

Veta 7.12. *Pre kolineárne body A, B, C, D platí, že tvoria harmonickú štvoricu práve vtedy, keď $(ABCD) = -1$.*

Dôkaz. Pre ľubovoľné dve harmonické štvorice A, B, C, D a A', B', C', D' existuje podľa základnej vety projektívnosť π taká, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$. Keďže každá projektívnosť zachováva harmonickosť a štvrtý harmonický bod je určený jednoznačne, musí platiť aj $\pi(D) = D'$.

To znamená, že podľa vety 7.10 majú všetky harmonické štvorice A, B, C, D rovnaký dvojpomer. Nech je to λ .

Vieme ale, že $H(A, B; C, D)$ znamená, že dvojice (A, B) a (C, D) sa oddeľujú, preto $\lambda < 0$. Tiež vieme, že potom platí aj $H(B, A; C, D)$, čo znamená, že dvojpomery $(ABCD)$ a $(BACD)$ sa musia rovnať, teda $\lambda = \frac{1}{\lambda}$. Jediné λ ktoré vyhovuje obom podmienkam je $\lambda = -1$.

Naopak pre každý bod D' na priamke AB rôznej od A, B, C, D je deliaci pomer (ABD') rôznej od (ABD) a teda aj

$$(ABCD') = \frac{(ABC)}{(ABD')} \neq \frac{(ABC)}{(ABD)} = (ABCD),$$

z čoho vyplýva, že preň platí $(ABCD') \neq -1$. □