

Projektívna geometria

7 Dvoj pomer

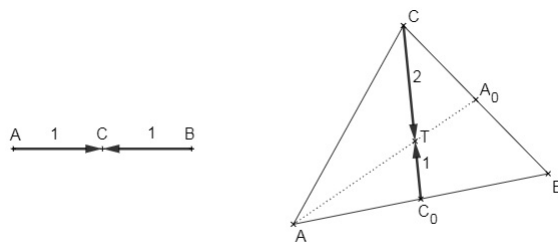
Pri štúdiu projektívnych zobrazení sme sa už zmienili o tom, že tieto zobrazenia nezachovávajú metrické vlastnosti ako dĺžky alebo uhly, ale zachovávajú vzťahy incidencie, oddeliteľnosť dvojíc, alebo harmonickosť. Ako sa presvedčíme, zachovávanie harmonickosti je dôsledok všeobecnejšej vlastnosti zachovávaného dvoj pomeru, istého číselného vyjadrenia relatívnej polohy štvorice kolineárnych bodov.

Začnime nasledujúcou úvahou. Pre ľubovoľnú trojicu rôznych kolineárnych bodov A, B, C v Euklidovej rovine majú vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$ vždy rovnaký smer. Pod rovnakým smerom rozumieme, že ležia na tej istej priamke, netvrdíme, že majú aj rovnakú orientáciu. Z toho vyplýva, že prvý vektor je nejaký nenulový násobok druhého vektora.

Definícia 7.1. Nech A, B, C sú tri rôzne kolineárne body. Deliacim pomerom bodu C vzhľadom na úsečku AB nazývame také nenulové číslo λ_C , že platí $\overrightarrow{AC} = \lambda_C \overrightarrow{BC}$. Značíme $\lambda_C = (ABC)$ a hovoríme tiež skrátene o deliacom pomere trojice bodov A, B, C .

Napríklad ak bod C je stredom úsečky AB , tak vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$ majú rovnakú dĺžku, ale opačnú orientáciu. Deliaci pomer (ABC) je v tom prípade rovný -1 .

V trojuholníku $\triangle ABC$, kde C_0 je stred strany AB je ťažnica CC_0 rozdelená ťažiskom T v pomere $2 : 1$. Deliaci pomer (CC_0T) je rovný -2 .



Aj z týchto príkladov môžeme usúdiť, že ak C leží vnútri Euklidovskej úsečky AB , je deliaci pomer (ABC) záporný. Je zrejmé, že ku každému zápornému číslu existuje bod C vnútri úsečky, ktorý ju delí v danom deliacom pomere.

Naopak pre body C ležiace mimo Euklidovskej úsečky AB sú deliace pomery (ABC) kladné. Lenže nie každé kladné reálne číslo sa v tomto prípade nadobúda ako nejaký deliaci pomer (ABC) . Keďže body A, B sú rôzne, vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$ sa nikdy nebudú rovnať. Teda pre žiadny bod C na Euklidovskej priamke nebude deliaci pomer (ABC) rovný 1. Vieme sa však k tejto hodnote ľubovoľne blízko priblížiť ak bod C zvolíme dostatočne ďaleko od bodov A, B . Je preto prirodzené definíciu deliaceho pomeru rozšíriť pre nevlastný bod C_∞ nasledovne

$$(ABC_\infty) = 1. \quad (7.1)$$

Týmto je na rozšírenej priamke AB každý bod $C \neq A, B$ jednoznačne určený hodnotou deliaceho pomeru (ABC) a nadobúdajú sa takto všetky možné nenulové hodnoty.

Ako cvičenie sa môžete presvedčiť že deliaci pomer trojice vlastných bodov sa správa nasledovne vzhľadom na zmenu poradia bodov.

Tvrdenie 7.2. *Nech $(ABC) = \lambda \neq 0, 1$. Potom*

$$a) (BAC) = \frac{1}{\lambda},$$

$$b) (ACB) = 1 - \lambda,$$

$$c) (CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1},$$

$$d) (BCA) = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

$$e) (CAB) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Deliaci pomer sa pri projektívnostiach nezachováva. Napríklad v trojuholníku z predchádzajúceho obrázka, perspektívnosť so stredom A z ťažnice CC_0 na stranu CB zobrazí ťažisko na stred strany. V predošlej kapitole sme dokonca ukázali že projektívnosťou vieme zobrazíť danú kolineárnu trojicu na ľubovoľnú kolineárnu trojicu. Budeme potrebovať pojem súvisiaci s polohov štvorice kolineárnych bodov.

Definícia 7.3. Nech A, B, C, D sú štyri vlastné kolineárne body. Dvojpomerom štvorice A, B, C, D nazývame číslo

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Túto definíciu rozšírime aj pre prípad prípad nevlastných bodov. Pred tým si ale všimnime, že znamienko dvojpomeru $(ABCD)$ závisí od toho, či sa dvojice (A, B) a (C, D) oddeľujú; ak áno, je dvojpomer záporný; ak nie, je dvojpomer kladný. Pre absolútnu hodnotu dvojpomeru platí

$$|(ABCD)| = \frac{|(ABC)|}{|(ABD)|} = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|}. \quad (7.2)$$

Všimnime si, že každý z bodov A, B, C, D je krajný bod práve jednej úsečky ktorej dĺžka sa nachádza v čitateli a rovnako krajný bod práve jednej úsečky ktorej dĺžka sa nachádza v menovateli.

Ak je napríklad bod A nevlastný, môžeme stále určiť veľkosť dvojpomeru tým, že v predpise (7.2) vyjadríme pomer $\frac{|AC|}{|AD|}$ ako deliaci pomer pomocou vzťahu (7.1) nasledovne

$$|(ABCD)| = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|BD|}{|BC|} = |(CDA)| \cdot \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|BC|} \quad (7.3)$$

Podobne pre nevlastný bod B dostaneme

$$|(ABCD)| = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \quad (7.4)$$

pre nevlastný bod C dostaneme

$$|(ABCD)| = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|AD|} \quad (7.5)$$

a pre nevlastný bod D dostaneme

$$|(ABCD)| = \frac{|AC||BD|}{|BC||AD|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|BC|}. \quad (7.6)$$

Ostáva nezodpovedaná situácia, keď sú všetky štyri body nevlastné. K tomu je potrebné zavedenie dvojpomeru štyroch konkurentných priamok.

Definícia 7.4. Nech a, b, c, d sú štyri rôzne vlastné priamky pretínajúce sa v jednom vlastnom bode. Dvojpomerom a, b, c, d nazývame číslo

$$(abcd) = \frac{\sin(\sphericalangle ac) \cdot \sin(\sphericalangle bd)}{\sin(\sphericalangle bc) \cdot \sin(\sphericalangle ad)},$$

pričom $\sphericalangle ac$ a pod. sú orientované uhly.

Táto definícia je zavedená tak aby pre veľkosť dvojpomeru platila analógia vzťahu (7.2) a znamienko sa správalo podobne ako v prípade štvorice bodov. Ostáva definovať dvojpomer štvorice priamok pretínajúcich sa v nevlastnom bode. Na to bude potrebné ujasniť si vzťah medzi dvojpomerami priamok a bodov.

Tvrdenie 7.5. *Nech A, B, C, D sú štyri vlastné kolineárne body a vlastný bod S je s nimi nekolineárny. Potom pre priamky a, b, c, d dané $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, $d = SD$ platí $(abcd) = (ABCD)$.*

Dôkaz. Dvojice priamok (a, b) a (c, d) sa oddeľujú práve vtedy keď sa oddeľujú dvojice bodov (A, B) a (C, D) . Znamienka oboch dvojpomerov sa teda rovnajú. Porovnajme ich veľkosti.

Počítajme absolútnu hodnotu $(abcd)$ podľa definície a rozšírme príslušný zlomok nasledovne

$$|(abcd)| = \frac{|\sin(\sphericalangle ac)| \cdot |\sin(\sphericalangle bd)|}{|\sin(\sphericalangle bc)| \cdot |\sin(\sphericalangle ad)|} = \frac{|SA| \cdot |SB| \cdot |SC| \cdot |SD| \cdot |\sin(\sphericalangle ac)| \cdot |\sin(\sphericalangle bd)|}{|SA| \cdot |SB| \cdot |SC| \cdot |SD| \cdot |\sin(\sphericalangle bc)| \cdot |\sin(\sphericalangle ad)|}$$

a preusporiadajme poradie činiteľov takto

$$|(abcd)| = \frac{|SA| \cdot |SC| \cdot |\sin(\sphericalangle ac)| \cdot |SB| \cdot |SD| \cdot |\sin(\sphericalangle bd)|}{|SB| \cdot |SC| \cdot |\sin(\sphericalangle bc)| \cdot |SA| \cdot |SD| \cdot |\sin(\sphericalangle ad)|}.$$

Výraz $|SA| \cdot |SC| \cdot |\sin(\sphericalangle ac)|$ je nič iné ako dvojnásobok obsahu $S_{\triangle ACS}$ trojuholníka $\triangle ACS$. Podobne upravme zvyšok a po vykrátení dvojek dostaneme

$$|(abcd)| = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}} \cdot \frac{S_{\triangle BDS}}{S_{\triangle ADS}},$$

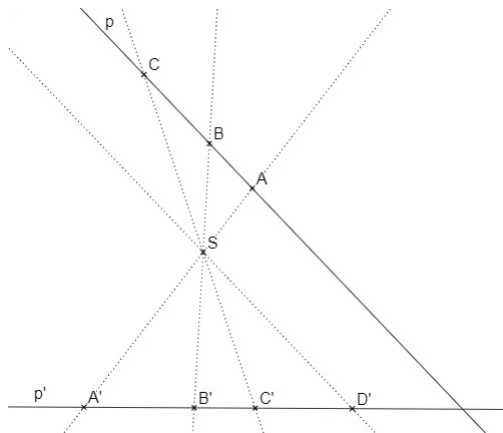
leže pomer obsahov trojuholníkov $\triangle ACS$ a $\triangle BCS$ je rovný pomeru dĺžok strán $|AC|$ a $|BC|$, pretože oba majú rovnakú výšku. Podobne pre $\triangle BDS$ a $\triangle ADS$. Preto

$$|(abcd)| = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} = |(ABCD)|,$$

podľa (7.2). □

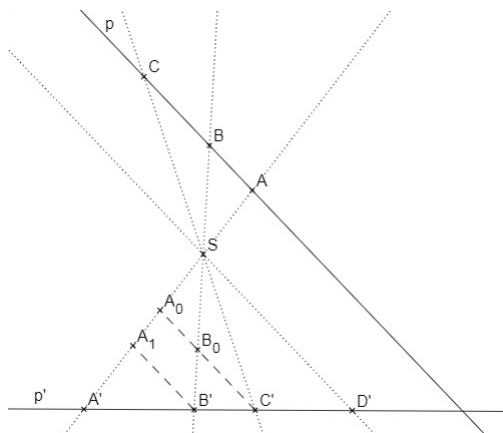
Tvrdenie 7.6. *Nech A, B, C, D sú štyri rôzne kolineárne body, pričom D je nevlastný. Nech vlastný bod S je s nimi nekolineárny. Potom pre priamky a, b, c, d dané $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, $d = SD$ platí $(abcd) = (ABCD)$.*

Dôkaz. Označme $p = AB$. Zvoľme bod D' na priamke SD rôznej od obidvoch a nejakú priamku p' rôznobežnú s a, b, c, d prechádzajúcu bodom D' . Označme $A' = a \cap p'$, $B' = b \cap p'$, $C' = c \cap p'$.



Podľa tvrdenia 7.5 platí $(abcd) = (A'B'C'D')$. Stačí teda dokázať rovnosť dvojpomerov $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Preložme bodom C' rovnobežku s d a označme A_0 resp. B_0 jej priesečníky s a , b . Podobne preložme ďalšiu rovnobežku bodom B' a označme A_1 jej priesečník s a .



Dvojpomer $(A'B'C'D')$ bude mať rovnaké znamienko ako $(ABCD)$, lebo body A', B', C', D' sú obrazy bodov A, B, C, D v perspektívnosti a teda oddeľiteľnosť príslušných dvojíc ostáva zachovaná. Počítajme veľkosť $(A'B'C'D')$.

$$|(A'B'C'D')| = \frac{|A'C'||B'D'|}{|B'C'||A'D'|}.$$

Obsahy $S_{\triangle A'C'S}$ a $S_{\triangle B'C'S}$ trojuholníkov $\triangle A'C'S$ a $\triangle B'C'S$ sú v rovnakom pomere ako dĺžky strán $|A'C'|$ a $|B'C'|$. Trojuholníky $\triangle A'B'A_1$ a $\triangle A'D'S$ sú podobné. Môžeme preto posledný vzťah upraviť

$$|(A'B'C'D')| = \frac{S_{\triangle A'C'S}}{S_{\triangle B'C'S}} \cdot \frac{|A_1S|}{|A'S|},$$

čo následne upravíme tým, že pomer $|A_1S|$ a $|A'S|$ nahradíme pomerom obsahov $S_{\triangle A_1C'S}$ a $S_{\triangle A'C'S}$ trojuholníkov $\triangle A_1C'S$ a $\triangle A'C'S$ a po vykrátení ostane

$$|(A'B'C'D')| = \frac{S_{\triangle A'C'S}}{S_{\triangle B'C'S}} \cdot \frac{S_{\triangle A_1C'S}}{S_{\triangle A'C'S}} = \frac{S_{\triangle A_1C'S}}{S_{\triangle B'C'S}}.$$

Teraz využijeme podobnosť trojuholníkov $\triangle A_0B_0S$ a $\triangle A_1B'S$, z ktorej vyplýva

$$\frac{|A_0S|}{|A_1S|} = \frac{|B_0S|}{|B'S|}.$$

Po dosadení dostaneme

$$|(A'B'C'D')| = \frac{S_{\triangle A_1C'S}}{S_{\triangle B'C'S}} = \frac{\frac{|A_0S|}{|A_1S|} \cdot S_{\triangle A_1C'S}}{\frac{|B_0S|}{|B'S|} \cdot S_{\triangle B'C'S}} = \frac{S_{\triangle A_0C'S}}{S_{\triangle B_0C'S}} = \frac{|A_0C'|}{|B_0C'|}.$$

Nakoniec opäť s využitím podobných trojuholníkov odvodíme

$$|(A'B'C'D')| = \frac{|A_0C'|}{|B_0C'|} = \frac{|AC|}{|BC|} = |(ABCD)|$$

podľa vzťahu (7.6). □