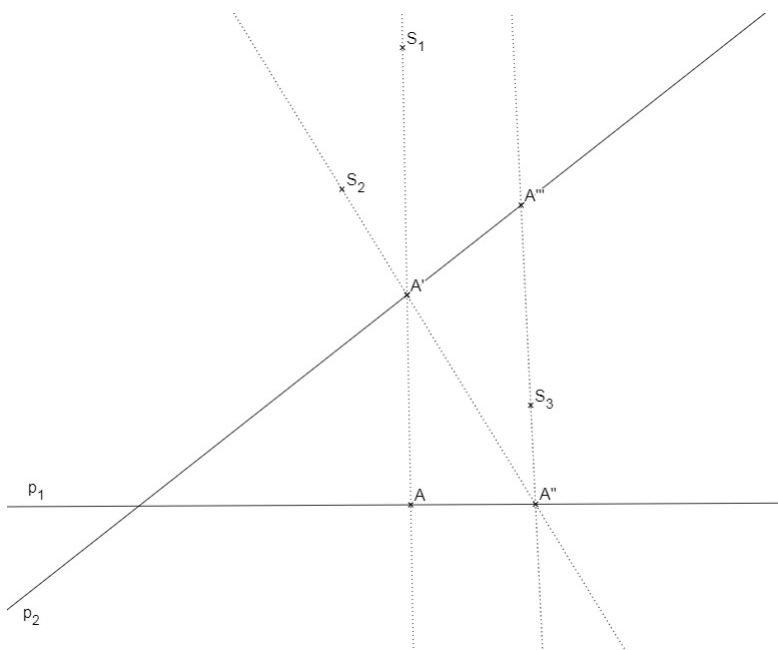


Projektívna geometria

6 Pappova veta - riešený príklad

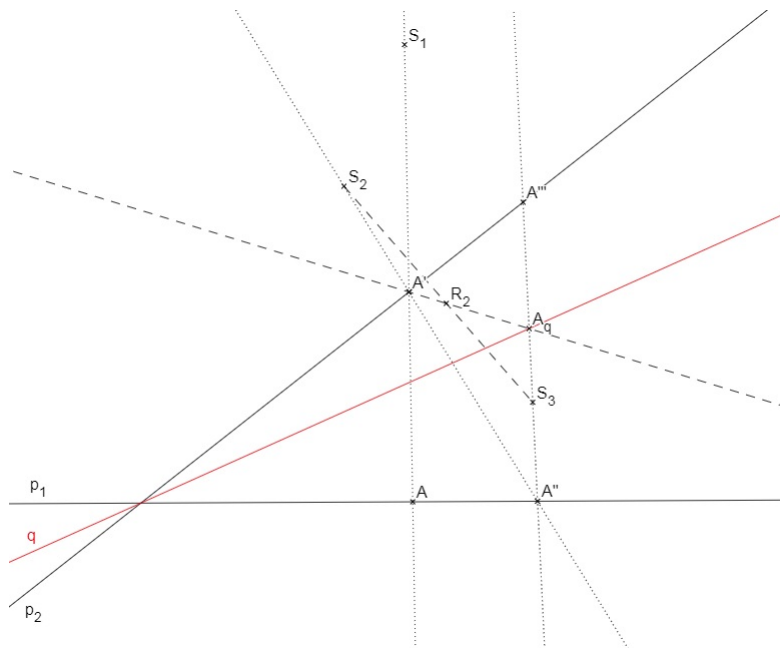
Uvažujme projektívnosť $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_1} p_2 \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} p_2$. Nech $A \in p_1$ a označme A', A'', A''' tak aby $A \xrightarrow[\wedge]{S_1} A' \xrightarrow[\wedge]{S_2} A'' \xrightarrow[\wedge]{S_3} A'''$.



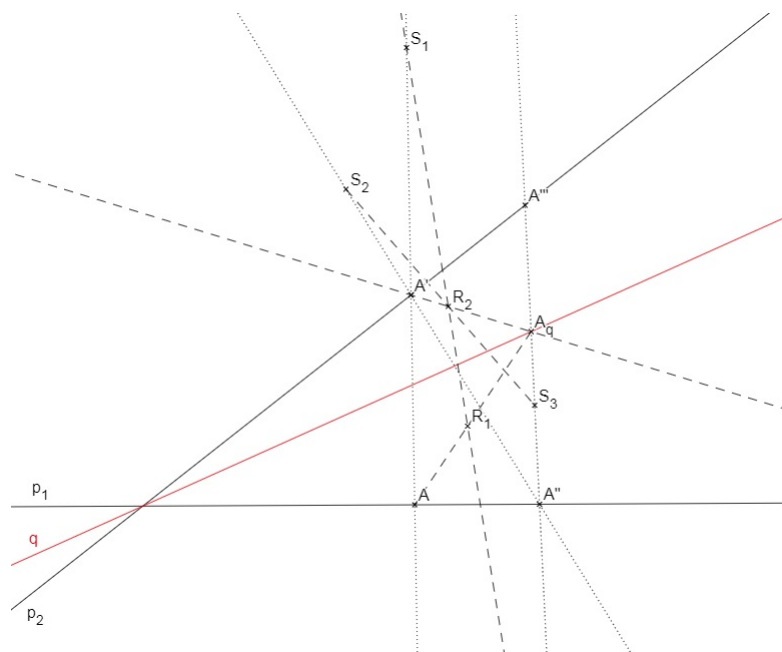
Zvoľme pomocnú priamku q prechádzajúcu priesečníkom p_1 a p_2 ale rôznu od obidvoch. Označme $A_q = A''A''' \cap q$, teda A_q bude obraz bodu A'' v perspektívnosti $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} q$ a bod A''' bude obraz A_q v perspektívnosti $q \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_2$. Zrejme zloženie $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} q \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_2$ je to isté ako perspektívnosť $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} p_2$, teda, že to platí pre každý bod na priamke p_1 , nie len A'' .

Skúmanú projektívnosť $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_1} p_2 \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} p_2$ vieme potom rozpísať ako zloženie $p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_1} p_2 \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_1 \xrightarrow[\wedge]{S_3} q \xrightarrow[\wedge]{S_2} p_2$. Napríklad bod A sa postupne zobrazuje na A', A'', A_q a nakoniec A''' .

Pozrime sa bližšie na priradenie $A' \mapsto A_q$. Je to zloženie perspektívností $p_2 \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_1 \stackrel{S_3}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} q$, kde priamky p_2, p_1, q sú konkurentné a preto existuje bod R_2 taký, že toto zloženie je perspektívnosť z priamky p_2 na q so stredom R_2 (podľa príkladu 6 z cvičenia 4).



Skúmanú projektívnosť $p_1 \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_2 \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_1 \stackrel{S_3}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_2$ vieme potom rozpísať ako zloženie $p_1 \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_2 \stackrel{R_2}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} q \stackrel{S_3}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_2$. Bod A sa postupne zobrazuje na A' , A_q a A'' . Analogicky ale projektívnosť $p_1 \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} p_2 \stackrel{R_2}{\underset{\wedge}{\rightleftharpoons}} q$ je perspektívnosťou so stredom R_1 . Pozri obrázok.



Skúmanú projektívnosť $p_1 \stackrel{S_1}{\wedge} p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} p_1 \stackrel{S_3}{\wedge} p_2$ vieme potom rozpísať ako zloženie $p_1 \stackrel{R_1}{\wedge} q \stackrel{S_3}{\wedge} p_2$. Bod A sa postupne zobrazuje na A_q a A''' .

To ale opäť vieme skrátiť na projektívnosť $p_1 \stackrel{S}{\wedge} p_2$, ktorá priradzuje bodu A priamo bod A''' ako je znázornené na obrázku na ďalšej strane.

