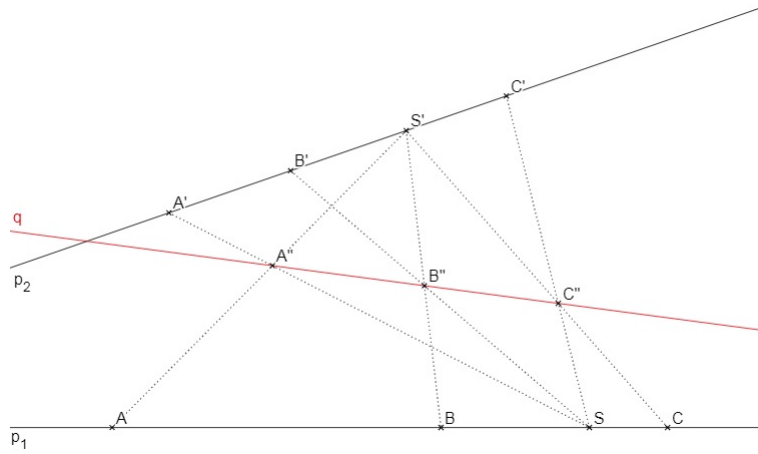


Dôkaz vety 6.2. Nech $p_1 = AB$ a $p_2 = A'B'$.

Predpokladajme najskôr, že $p_1 \neq p_2$ a ich priesečník je rôzny od každého zo šiestich zadaných bodov.

Nech π je nejaká projektívnosť, ktorá zobrazuje A, B, C v poradí na A', B', C' . Projektívnosť π je potom zložením konečného počtu perspektívností, ale podľa predošlého rozboru, ak je ich počet aspoň tri, vieme ho znížiť. Preto teda existujú nejaké perspektívnosti π_1 a π_2 také, že $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$. Navyše vďaka leme 6.5 môžeme predpokladať, že stred S' perspektívnosti π_1 leží na p_2 a stred S perspektívnosti π_2 leží na p_1 . Projektívnosť π je potom rovná $p_1 \xrightarrow[S]{S'} q \xrightarrow[A]{S} p_2$. Označme A'', B'', C'' po poradí obrazy bodov A, B, C v perspektívnosti π_1 : $p_1 \xrightarrow[S]{S'} q$.

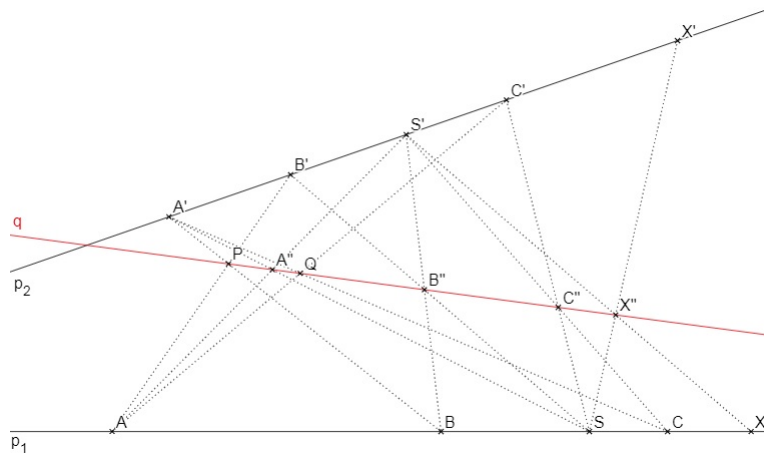


Ukážeme najskôr, že poloha priamky q závisí len od A, B, C, A', B', C' a nie od voľby π . Nech $P = AB' \cap A'B$. Podľa Pappovej vety pre trojice A, B, S a A', B', S' sú body P, A'', B'' kolineárne, čo znamená, že $P \in q$.

Podobne pre bod $Q = AC' \cap A'C$ podľa Pappovej vety pre A, C, S a A', C', S' platí, že je kolineárny s A'' a C'' , teda aj $Q \in q$.

Keďže podľa predpokladov sú body A, B, C rôzne, tak $P \neq Q$ a teda priamka q je už nimi určená. Lenže poloha P, Q je daná priamo A, B, C, A', B', C' a nezávisí od π .

Uvažujme teraz obraz bodu $X \in p_1$ rôzneho od A, B, C a S v projektívnosti π : $p_1 \xrightarrow[S]{S'} q \xrightarrow[A]{S} p_2$. Znova označme $X'' = \pi_1(X)$, teda taký bod, že $X \xrightarrow[S]{S'} X''$.

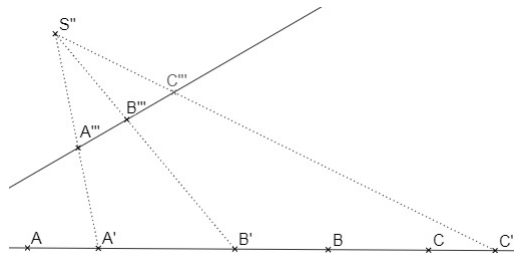


Podľa Pappovej vety pre trojice A, S, X a A', S', X' sú body A'', X'' a priesečník $AX' \cap A'X$ kolineárne. Teda priesečník $AX' \cap A'X$ leží na q .

To ale platí pre ľubovoľný bod X na priamke p_1 . Inými slovami, $X' = \pi(X)$ sa zhoduje s obrazom bodu X v projektívnosti $p_1 \xrightarrow{A'} q \xrightarrow{A} p_2$.

Projektívnosť π sa nám teda práve podarilo vyjadriť ako zloženie perspektívností $p_1 \xrightarrow{A'} q \xrightarrow{A} p_2$, z čoho vidíme, že projektívnosť π je jednoznačne určená polohou bodov A, B, C, A', B', C' , lebo už priamka q bola.

Ostáva už len vyšetriť prípad, keď sa priamky p_1, p_2 rovnajú alebo keď sú rôzne a ich priesečník je jeden z daných šiestich bodov, napríklad bod A . V oboch prípadoch vieme zvolením vhodnej perspektívnosti $\pi_0: R(p_2) \rightarrow R(p_3)$ zobrazíť body A', B', C' na A''', B''', C''' tak, že trojice A, B, C a A''', B''', C''' budú v takej polohe, pre ktorú sme tvrdenie už dokázali.



Bude existovať jediná projektívnosť zobrazujúca A, B, C na A''', B''', C''' . Nech π a π' sú projektívnosti zobrazujúce A, B, C na A', B', C' . Potom $\pi_0 \circ \pi$ a $\pi_0 \circ \pi'$ sa musia rovnať a keďže π_0 je bijekcia, tak nutne $\pi = \pi'$. $\square$

Z dôkazu vyplýva, že pre ľubovoľnú dvojicu bodov X, Y a ich obrazy X', Y' v projektívnosti π platí, že bod $XY' \cap X'Y$ leží na priamke q , ktorá je jednoznačne určená zobrazením π . Vďaka tomu môžeme (s využitím duality) definovať nasledovné.

Definícia 6.6. Nech $\pi: R(p) \rightarrow R(p')$ je projektívnosť. Priamku δ tvorenú bodmi $XY' \cap X'Y$ nazývame direkčná os projektívnosti π .

Nech $\pi': Z(S) \rightarrow Z(S')$ je projektívnosť. Bod Δ ktorým prechádzajú všetky priamky $(x \cup y') \cap (x' \cap y)$ nazývame direkčný stred projektívnosti π' .

Tieto pojmy nemôžeme definovať pre projektívnosti na tej istej priamke alebo na tom istom zväzku. Pre takéto projektívnosti ale zo základnej vety (veta 6.2) vyplýva nasledovné pozorovanie.

Dôsledok 6.7. *Projektívnosť $\pi: R(p) \rightarrow R(p)$ s troma rôznymi samodružnými bodmi je nutne identita.*

Projektívnosť $\pi': Z(S) \rightarrow Z(S')$ s troma rôznymi samodružnými priamkami je nutne identita.

Neidentické projektívnosti na tej istej množine môžu mať teda najviac dva samodružné body (priamky). Podľa ich počtu ich delíme nasledovne.

Definícia 6.8. Projektívnosť nazývame

- a) hyperbolická, ak má práve dva samodružné body (priamky),
- b) paraolická, ak má práve jeden samodružný bod (priamku),
- c) eliptická, ak nemá žiadny samodružný bod (priamku).

Pre projektívnosti na tej istej množine definujeme ešte nasledovný pojem.

Definícia 6.9. Nech $\pi: R(p) \rightarrow R(p')$ je projektívnosť. Navzájom rôzne body A, A' pre ktoré $\pi(A) = A'$ a zároveň $\pi(A') = A$ nazývame vratnou dvojicou projektívnosti π . Projektívnosť π pre ktorú je každá dvojica rôznych bodov $(X, \pi(X))$ vratnou dvojicou nazývame involutórna projektívnosť alebo involúcia.

Analogicky sa definuje involúcia zväzku priamok.

Zo základnej vety dostaneme nasledovné kritérium pre involúciu.

Tvrdenie 6.10. *Nech projektívnosť $\pi: R(p) \rightarrow R(p)$ má vratnú dvojicu bodov (X, X') . Potom je π involúciou.*

☐