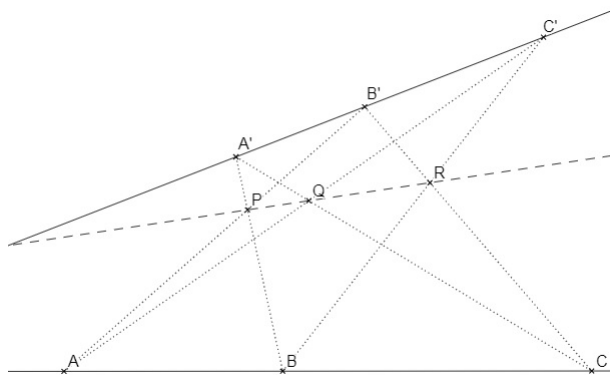


Projektívna geometria

6 Pappova veta

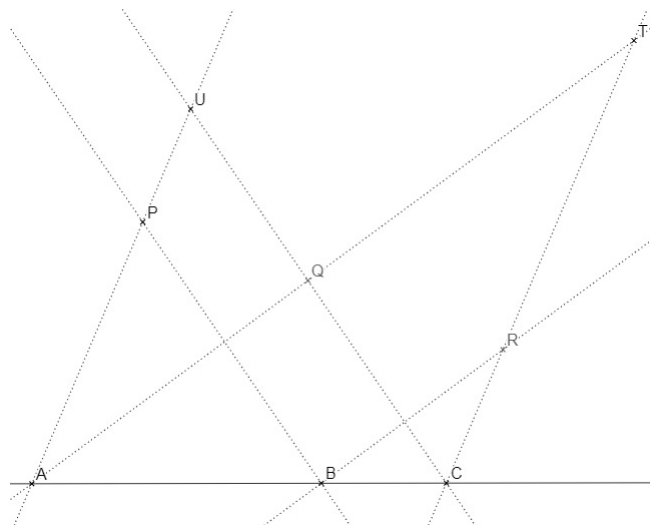
Pappos z Alexandrie bol jedným z významných starovekých gréckych matematikov. Je po ňom okrem iného pomenovaná táto fundamentálna projektívna vlastnosť.

Veta 6.1. *Nech p, p' sú dve rôzne priamky. Nech A, B, C sú tri rôzne body na priamke p a A', B', C' tri rôzne body na priamke p' , všetky rôzne od priesečníka $p \cap p'$. Potom sú body $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $R = BC' \cap B'C$ kolineárne.*



Dôkaz. Nech $p, p', A, B, C, A', B', C'$ sú ako požadujeme. Uvažujme nejakú kolineáciu, ktorá zobrazí body A', B' na body A_∞, B_∞ na nevlastnej priamke. Napríklad homológia $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S, o, A', A_\infty)$ so stredom $S = A'A_\infty \cap B'B_\infty$ a osou ľubovoľnou rôznou rovnobežkov s priamkou AB . Z toho, že $\mathcal{H}$ je kolineácia vyplýva, že obraz C' bude nejaký ďalší nevlastný bod C_∞ na nevlastnej priamke $u_\infty = \mathcal{H}(p')$, ale obrazy bodov A, B, C budú vlastné body na vlastnej priamke $\mathcal{H}(p)$. Ak dokážeme, že tvrdenie platí pre dvojicu priamok $\mathcal{H}(p)$ a $\mathcal{H}(p')$ a trojice $\mathcal{H}(A), \mathcal{H}(B), \mathcal{H}(C)$ a $A_\infty, B_\infty, C_\infty$, tak z toho, že $\mathcal{H}$ bola kolineácia bude tvrdenie musieť platiť aj pre pôvodné zadanie.

Stačí teda dokázať, že tvrdenie platí pre ľubovoľnú vlastnú priamku p s troma bodmi A, B, C a nevlastnú priamku u_∞ s ľubovoľnými bodmi $A_\infty, B_\infty, C_\infty$. Označme navyše $T = AQ \cap CR$ a $U = AP \cap CQ$.



Zrejme trojuholníky $\triangle ACT$ a $\triangle BCR$ sú podobné a preto

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|CR|}{|CT|} \quad (6.1)$$

Rovnako z podonosti $\triangle ACU$ a $\triangle ABP$ máme

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AU|} \quad (6.2)$$

Kombináciou vzťahov (6.1) a (6.2) dostaneme

$$\frac{|UP|}{|UA|} = 1 - \frac{|AP|}{|AU|} = 1 - \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|CR|}{|CT|} \quad (6.3)$$

Nakoniec $\triangle CQT$ a $\triangle UQA$ sú tiež podobné, teda platí

$$\frac{|UQ|}{|CQ|} = \frac{|UA|}{|CT|} \quad (6.4)$$

Vynásobme obe strany rovnice (6.3) podielom $\frac{|UA|}{|CR|}$ a upravme pomocou (6.4)

$$\frac{|UP|}{|CR|} = \frac{|UA|}{|CT|} = \frac{|UQ|}{|CQ|}$$

Posledný vzťah ale potom hovorí, že trojuholníky $\triangle CRQ$ a $\triangle UPQ$ sú podobné, lebo uhly $\sphericalangle QCR$ a $\sphericalangle QUP$ sú zhodné. Z podobnosti týchto trojuholníkov potom vyplýva, že aj uhly $\sphericalangle CQR$ a $\sphericalangle UQP$ sú zhodné. Keďže body C, Q, U sú kolineárne tak z rovnosti týchto uhlov dostaneme, že R, Q, P sú kolineárne ako sme chceli dokázať. $\square$

Vďaka tomuto môžeme odpovedať na otázku jednoznačnosti projektívnosti, ktorú sme skonštruovali v Tvrdení 4.4. Platí nasledujúca veta, známa ako základná veta projektívnej geometrie.

Veta 6.2. *Pre každú trojicu kolineárnych bodov A, B, C a každú trojicu kolineárnych bodov A', B', C' existuje jednoznačne určená projektívnosť π , taká, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$ a $\pi(C) = C'$.*

Pred tým, ako dokážeme túto vetu si najskôr pripravíme niekoľko jednoduchších tvrdení. Projektívnosti sú definované ako zloženia perspektívností, ale za istých predpokladov môžeme takto opäť dostať perspektívnosť.

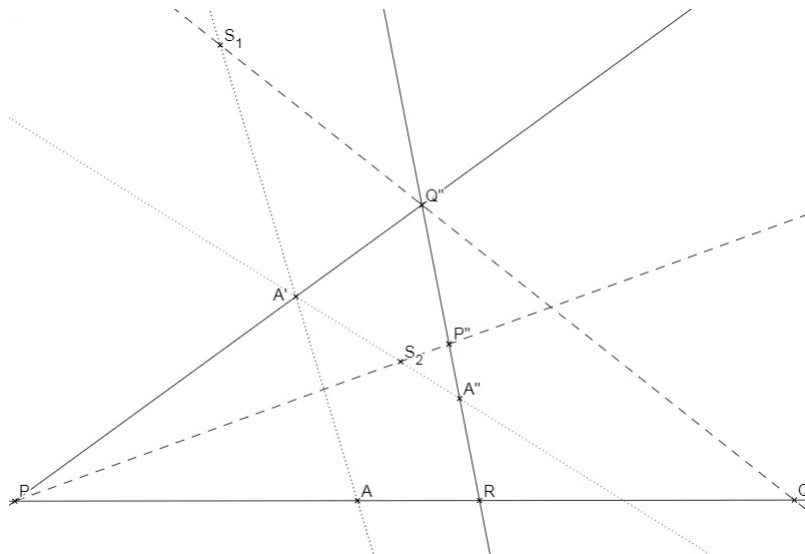
Lema 6.3. *Nech sú dané tri rôzne priamky p_1, p_2, p_3 a na nich neležiace body S_1 a S_2 . Nech platí jedna z podmienok*

- a) *priamky p_1, p_2, p_3 sú konkurentné,*
- b) *body S_1, S_2 a $p_1 \cap p_3$ sú kolineárne.*

Potom je projektívnosť $\pi: p_1 \underset{\wedge}{=} S_1 \underset{\wedge}{=} p_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$ tiež perspektívnosťou.

Dôkaz. Časť a) je príklad 6 z cvičení 4.

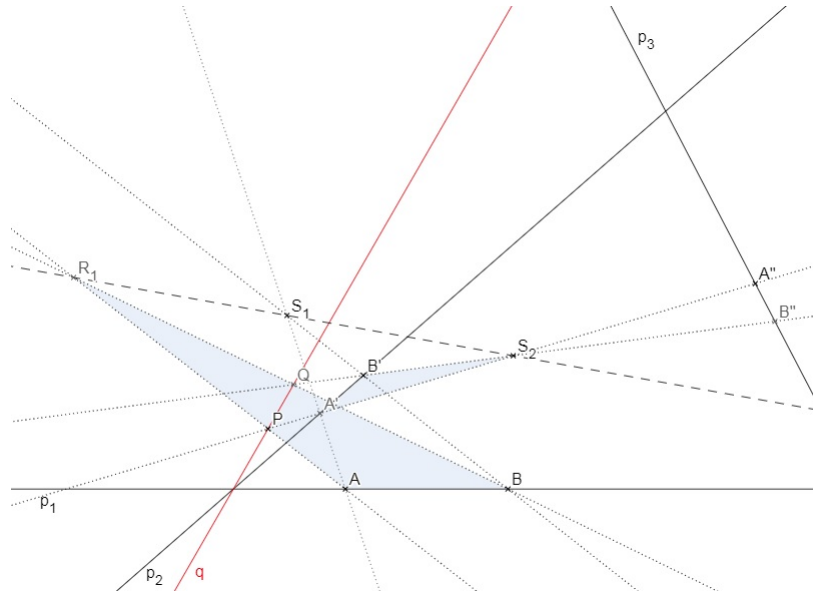
Dokážeme časť b). Označme postupne priesečníky $P = p_1 \cap p_2$, $Q'' = p_2 \cap p_3$ a $R = p_1 \cap p_3$. Navyše definujme body $P'' = PS_2 \cap p_3$ a $Q = Q''S_1 \cap p_1$. Na nasledujúcom obrázku je znázornená konštrukcia A'' , pričom $A \underset{\wedge}{\overset{S_1}{=}} A'$ a $A' \underset{\wedge}{\overset{S_2}{=}} A''$.



Podľa predpokladu sú body S_1, S_2, R kolíneárne. Použime Pappovu vetu na túto trojicu a trojicu P, Q'', A' . Dostaneme, že body $S = S_1Q'' \cap PS_2, A, A''$ sú kolíneárne. Lenže bod S nezávisí od A . Teda každý bod A a jeho obraz $A'' = \pi(A)$ sú vo vzťahu perspektívnosti $A \stackrel{S}{\underset{\wedge}{\sim}} A''$, čo ale znamená, že π je naozaj perspektívnosť. $\square$

Lema 6.4. *Nech sú dané tri rôzne priamky p_1, p_2, p_3 a na nich neležiace body S_1 a S_2 , pričom nanastáva žiaden z prípadov z lemy 6.3. Potom pre ľubovoľnú priamku $q \neq p_1$ prechádzajúcu bodom $p_1 \cap p_2$ existuje bod R_1 na priamke S_1S_2 taký, že projektívnosť $p_1 \underset{\wedge}{=} S_1 \underset{\wedge}{=} p_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$ je zhodná s $p_1 \underset{\wedge}{=} R_1 \underset{\wedge}{=} q \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$.*

Dôkaz. Označme perspektívnosti $p_1 \underset{\wedge}{=} S_1 \underset{\wedge}{=} p_2$ a $p_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$ po poradí π_1, π_2 . Nech $A \in p_1$, $A' = \pi_1(A)$ a $A'' = \pi_2(A')$. Definujme ďalej body $P = A'A'' \cap q$ a $R_1 = S_1S_2 \cap AP$.



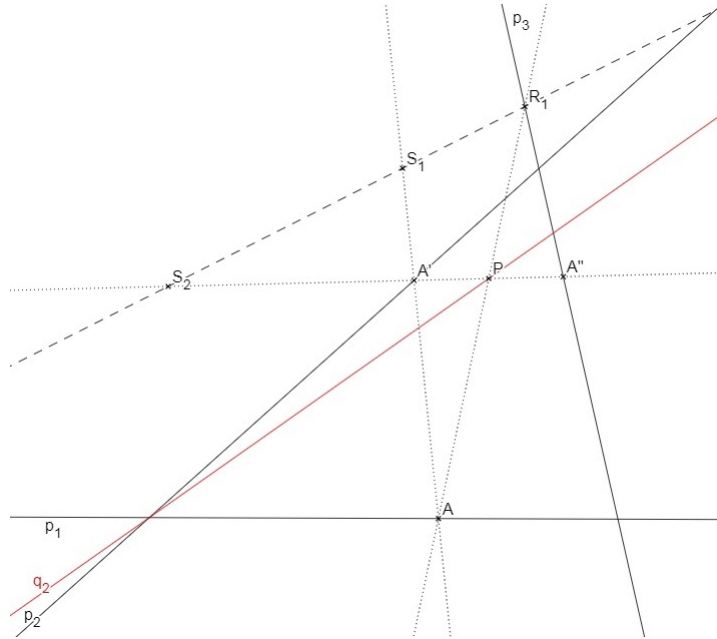
Pre ľubovoľný bod $B \in p_1$ a jeho obrazy $B' = \pi_1(B), B'' = \pi_2(B')$ uvažujme trojuholníky $\triangle ABR_1$ a $\triangle A'B'S_2$. Keďže $AA' \cap BB' \cap R_1S_2 = S_1$, tak z Desargovej vety dostaneme, že body $AB \cap A'B', P = AR_1 \cap A'S_2$ a $Q = BR_1 \cap B'S_2$ sú kolíneárne. Inak povedané priamky BR_1 a $B'B''$ sa pretnú na priamke q . To ale znamená, že bod B'' je obrazom bodu B aj v projektívnosti $p_1 \underset{\wedge}{=} R_1 \underset{\wedge}{=} q \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$, t.j. platí $B \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\sim}} B' \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\sim}} B''$ a zároveň $B \stackrel{R_1}{\underset{\wedge}{\sim}} Q \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\sim}} B''$. $\square$

Lema 6.4 hovorí, že skladané perspektívnosti možno trochu modifikovať bez toho aby sa zmenil výsledok ich skladania. Podobnou myšlienkou je motivovaná a odvodená aj nasledovná lema.

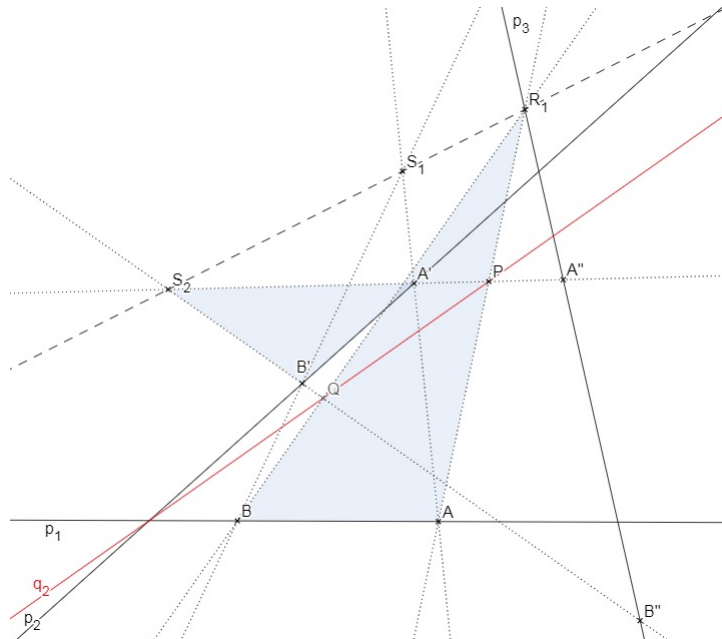
Lema 6.5. *Nech sú dané tri rôzne priamky p_1, p_2, p_3 a na nich neležiace body S_1 a S_2 , pričom nanastáva žiaden z prípadov z lemy 6.3. Potom existuje ďalšia priamka q a body $R_1 \in p_3$, $R_2 \in p_1$ také, že pôvodná projektívnosť $p_1 \underset{\wedge}{=} S_1 \underset{\wedge}{=} p_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$ je zhodná s projektívnosťou $p_1 \underset{\wedge}{=} R_1 \underset{\wedge}{=} q \underset{\wedge}{=} R_2 \underset{\wedge}{=} p_3$.*

Dôkaz. Označme perspektívnosti $p_1 \underset{\wedge}{=} S_1 \underset{\wedge}{=} p_2$ a $p_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$ po poradi π_1, π_2 . Najskôr, v prvom kroku, určíme priamku q_2 takú, že pôvodná projektívnosť $\pi_2 \circ \pi_1$ bude zhodná s $p_1 \underset{\wedge}{=} R_1 \underset{\wedge}{=} q_2 \underset{\wedge}{=} S_2 \underset{\wedge}{=} p_3$.

Zobrazme ľubovoľný bod $A \in p_1$, teda určíme A', A'' tak, aby $A \underset{\wedge}{=}^{S_1} A' \underset{\wedge}{=}^{S_2} A''$. Nech $R_1 = S_1 S_2 \cap p_3$ a priamka q_2 je spojnica priesečníka $p_1 \cap p_2$ a bodu $P = A' A'' \cap AR_1$.



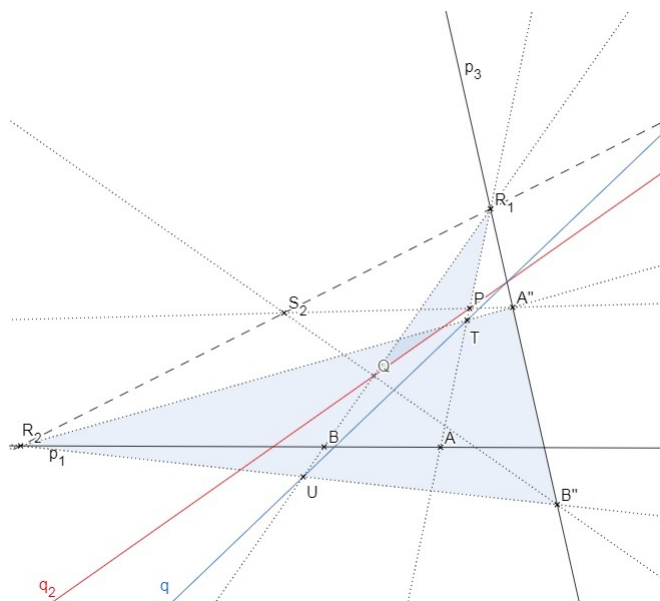
Pre ľubovoľný bod $B \in p_1$ a jeho obrazy $B' = \pi_1(B)$, $B'' = \pi_2(B')$ uvažujme trojuholníky $\triangle BAR_1$ a $\triangle B'A'S_2$. Keďže $BB' \cap AA' \cap R_1S_2 = S_1$, tak podľa Desargovej vety sú body $p_1 \cap p_2$, $Q = BR_1 \cap B'S_2$ a $P = AR_1 \cap A'S_2$ kolineárne.



Akokoľvek zvolíme $B \in p_1$, pretnú sa priamky BR_1 a $B'B''$ na priamke q_2 . To ale potom znamená, že bod B'' je obrazom bodu B aj v projektívnosti $p_1 = R_1 = q_2 = S_2 = p_3$. Prvý krok dôkazu je hotový, lebo platí $B \stackrel{S_1}{\wedge} B' \stackrel{S_2}{\wedge} B''$ a zároveň $B \stackrel{R_1}{\wedge} Q \stackrel{S_2}{\wedge} B''$.

V druhom kroku dôkazu určíme priamku q takú, že projektívnosť z predošlého kroku $p_1 = R_1 = q_2 = S_2 = p_3$ sa bude zhodovať s hľadanou projektívnosťou $p_1 = R_1 = q = R_2 = p_3$. Označme $R_2 = R_1S_2 \cap p_1$ a $T = AP \cap A'R_2$. Nech q je spojnice priesečníka $q_2 \cap p_3$ a bodu T .

Ronako ako v predošlom zistíme, že pre ľubovoľný bod $B \in p_1$, jeho obraz Q v perspektívnosti $p_1 = R_1 = q_2$ a obraz B'' bodu Q v perspektívnosti $q_2 = S_2 = p_3$ bude platiť, že priesečník $U = BQ \cap B''R_2$ bude ležať na priamke q . V tomto prípade použitím Desargovej vety na trojuholníky $\triangle QPR_1$ a $\triangle B''A'R_2$ a stred S_2 .



Záver teraz je, že tak ako platilo $B \stackrel{R_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} Q \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} B''$, teraz platí aj $B \stackrel{R_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} U \stackrel{R_2}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} B''$ v projektívnosti $p_1 \stackrel{R_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_2 \stackrel{R_2}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_3$. $\square$

Pomocou týchto lemm dokážeme, že každé zloženie troch perspektívností možno zapísať ako zloženie najviac dvoch.

Uvažujme $p_1 \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_2 \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_3 \stackrel{S_3}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_4$. Rozoberme najskôr isté špeciálne prípady.

Ak $S_1 = S_2$ alebo $S_2 = S_3$ tak príslušne dve perspektívnosti sa zložia ihneď na perspektívnosť $p_1 \stackrel{S_1}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_3$ resp. $p_2 \stackrel{S_2}{\underset{\wedge}{\rightrightarrows}} p_4$ a sme hotoví.

Ak $p_1 = p_3$ a zároveň $p_2 = p_4$, tak výsledok bude perspektívnosť. Tento príklad spravíme podrobne ako cvičenie.

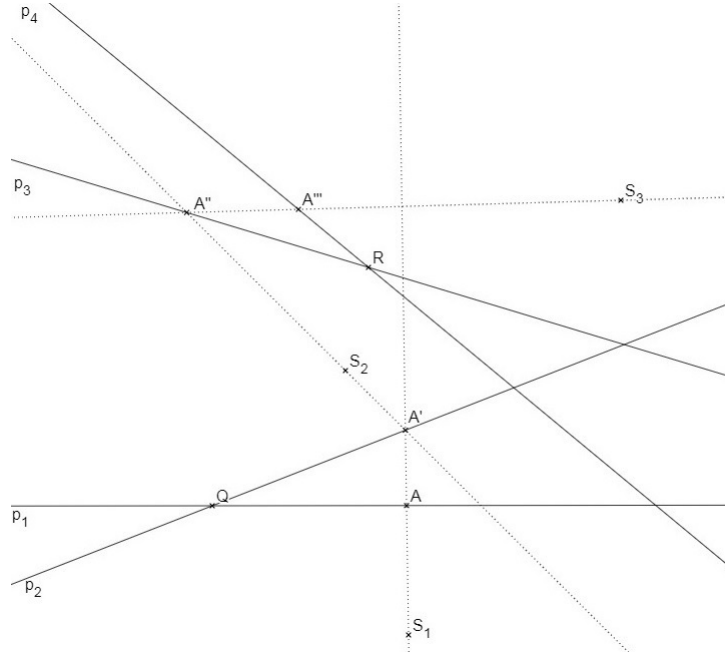
Ak nastáva práve jeden z prípadov $p_1 = p_3$ alebo $p_2 = p_4$, použijeme lemu 6.4 a problematickú priamku mierne nakloníme.

Ak prvá a druhá alebo druhá a tretia skladaná perspektívnosť spĺňajú predpoklady lemy 6.3, tak ich ihneď nahradíme príslušnou perspektívnosťou a sme hotoví.

V predošlom je zahrnutý prípad keď sú priamky p_1, p_2, p_3 alebo p_2, p_3, p_4 konkurentné. Ak by p_1, p_3, p_4 alebo p_1, p_2, p_4 boli konkurentné použijeme lemu 6.4 a p_3 resp. p_2 odkloníme.

Predpokladajme teda, že priamky p_i pre $i = 1, 2, 3, 4$ sú navzájom rôzne a

žiadne tri nie sú konkurentné. Označme $Q = p_1 \cap p_2$ a $R = p_3 \cap p_4$. Podľa predpokladov sú to rôzne body a priamka $q = QR$ je rôzna od každej p_i .



Označme A_q obraz bodu A' v perspektívnosti $p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} q$. Zrejme A', S_2, A_q, A'' sú kolineárne a teda perspektívnosť $p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} p_3$ je zhodná so zložením $p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} q \stackrel{S_2}{\wedge} p_3$. Teda zloženie $p_1 \stackrel{S_1}{\wedge} p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} p_3 \stackrel{S_3}{\wedge} p_4$ je zhodné so zložením štyroch perspektívností $p_1 \stackrel{S_1}{\wedge} p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} q \stackrel{S_2}{\wedge} p_3 \stackrel{S_3}{\wedge} p_4$.

Na prvý pohľad sme si nepomohli, ale keď sa na to lepšie pozrieme vidíme, že priamky p_1, p_2, q sú konkurentné a podľa lemy 6.3 je zloženie prvých dvoch perspektívností $p_1 \stackrel{S_1}{\wedge} p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} q$ jednoducho perspektívnosť so stredom R_1 , kde R_1 je priesečník S_1S_2 a AA_q (pozri nasledujúci obrázok).

Analogicky priamky q, p_3, p_4 sú konkurentné a podľa lemy 6.3 je zloženie posledných dvoch perspektívností $q \stackrel{S_2}{\wedge} p_3 \stackrel{S_3}{\wedge} p_4$ tiež perspektívnosť $q \stackrel{R_2}{\wedge} p_4$ s nejakým novým stredom R_2 .

Záver je, že pôvodné zloženie $p_1 \stackrel{S_1}{\wedge} p_2 \stackrel{S_2}{\wedge} p_3 \stackrel{S_3}{\wedge} p_4$ je zhodné so zložením $p_1 \stackrel{R_1}{\wedge} q \stackrel{R_2}{\wedge} p_4$, ako sme chceli.

