

Projektívna geometria

5 Cvičenia

1. Ako príklad kolineácie sme spomenuli posunutie. Teraz to upresníme. Posunutie je zobrazenie $t: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$, ale kolineácie sme definovali ako zobrazenia $F: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$. Potrebujeme si vyjasniť ako posunutie rozšíriť z $\mathbb{E}_2$ na $\bar{\mathbb{E}}_2$, teda ujasniť si, čo sa deje s nevlastnými bodmi.

Ak $p \in \mathbb{E}_2$ je priamka, tak jej obrazom v posunutí bude priamka s ňou rovnobežná. Obe priamky sú v rozšírenej Euklidovej rovine doplnené tým istým nevlastným bodom. Posunutie $t: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ preto rozšírime na kolineáciu $T: \bar{\mathbb{E}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_2$, tak, že

$$T(X) = t(X) \text{ ak } X \text{ je vl. bod, } T(X) = X \text{ ak } X \text{ je nevl. bod.} \quad (1)$$

Nevlastná priamka bude teda osou kolineácie T . Tým pádom T musí mať aj stred. Žiaden vl. bod však nie je samodružný. Pre ľubovoľný vl. bod X máme od neho rôzny obraz $X' = T(X)$ a spolu teda určujú priamku. Všetky takto určené priamky sú ale navzájom rovnobežné, t.j. sú z jedného zväzku priamok prechádzajúcich istým nevlastným bodom S . Keďže stred S leží na osi, kolineácia T je príkladom elácie.

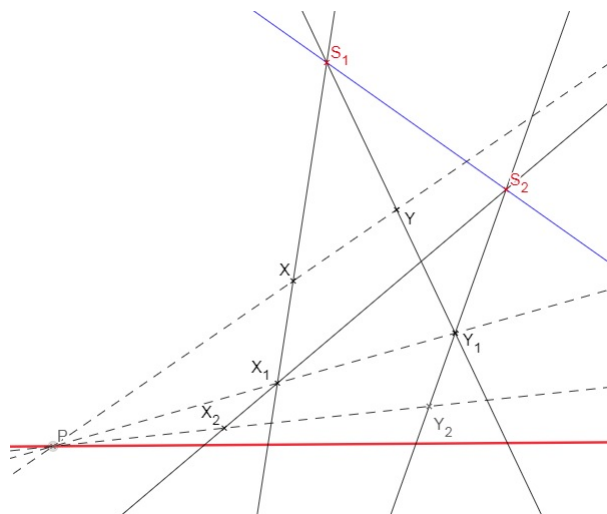
Podobným spôsobom si rozmyslite ako rozšíriť nasledovné zobrazenia a určte ich stred a os, ak existujú.

- a) osová súmernosť
- b) stredová súmernosť
- c) rovnoláhosť
- d) otočenie

2. Premyslite si dôkaz dôsledku 5.3 a tvrdenia 5.6. V dôkaze vety 5.7 som dokázal, že každá stredová kolineácia je osová. Dôkaz opačným smerom sa spraví duálne, rozmyslite si to.

3. Nech sú dané dve homológie $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ s tou istou osou o , pričom stred $\mathcal{H}_1$ je S_1 a stred $\mathcal{H}_2$ je S_2 . Dokážte, že ich zloženie $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ je opäť kolineácia s

osou o a jej stred leží na priamke S_1S_2 .



na obrázku $X_1 = \mathcal{H}_1(X)$ a $X_2 = \mathcal{H}_2(X_1) = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(X)$
 $Y_1 = \mathcal{H}_1(Y)$ a $Y_2 = \mathcal{H}_2(Y_1) = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(Y)$