

Projektívna geometria

5 Kolineácie

Presuňme sa teraz na chvíľu z rozšírenej Euklidovej roviny do rozšíreného Euklidovho priestoru, aby sme preskúmali dôležitú vlastnosť stredového premietania, ktorú sme nevideli pri premietaní z priamky na priamku, ale je zrejmá pri premietaní z roviny do roviny.

Definícia 5.1. Nech α, α' sú dve (nie nutne rôzne) roviny v $\bar{\mathbb{E}}_3$. Bijektívne zobrazenie $F: \alpha \rightarrow \alpha'$, ktoré zobrazuje každú trojicu kolineárnych bodov na trojicu kolineárnych bodov sa nazýva kolineácia.

V prípade, že $\alpha = \alpha'$ sa na danú kolineáciu môžeme dívať ako na bijektívne zobrazenie $\bar{\mathbb{E}}_2$ na $\bar{\mathbb{E}}_2$, keďže každá rovina v rozšírenom Euklidovom priestore je sama o seba rozšírenou Euklidovou rovinou. Práve touto situáciou sa budeme ďalej zaoberať.

Definícia 5.2. Bod P nazývame samodružným bodom kolineácie F , ak spĺňa $F(P) = P$. Priamka q sa nazýva samodružnou priamkou kolineácie F , ak $F(q) = q$.

Dôsledok 5.3. *Priamka prechádzajúca dvoma rôznymi samodružnými bodmi kolineácie je samodružnou priamkou tejto kolineácie.*

Priesečník dvoch samodružných priamok kolineácie je samodružným bodom tejto kolineácie.

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva priamo z definície a prenechávame ho ako cvičenie.

Každé posunutie v rovine je kolineáciou. Ak posúvame o nenulový vektor, žiaden vlastný bod nebude samodružný, ale každá priamka rovnobežná so smerom posúvania bude samodružnou priamkou. Napriek tomu, že body na nej menia svoju pozíciu, priamka ako celok sa posunutím presunie na seba. Aby sme túto situáciu odlíšili od napríklad osovej súmernosti, kde os je samodružnou priamkou tvorenou samodružnými bodmi, tak zavádzame ešte jednu definíciu

Definícia 5.4. Bod S nazývame silne samodružným bodom kolineácie, ak každá priamka ním prechádzajúca je samodružnou priamkou tejto kolineácie.

Priamka o sa nazýva silne samodružnou priamkou kolineácie, ak každý bod na nej je samodružným bodom tejto kolineácie.

Budeme skúmať práve tie kolineácie, ktoré majú bod alebo priamku s práve touto vlastnosťou.

Definícia 5.5. Kolineácia so silne samodružným bodom S sa nazýva stredová kolineácia a bod S sa nazýva stred.

Kolineácia so silne samodružnou priamkou o sa nazýva osová kolineácia a priamka o sa nazýva os.

V nasledujúcom sa pokúsime kategorizovať kolineácie z hľadiska počtu stredov a osí a ich vzájomnej polohy. Našťastie to bude možné vďaka nasledujúcemu tvrdeniu.

Tvrdenie 5.6. *Stredová kolineácia s dvoma rôznymi stredmi je identita. Osová kolineácia s dvoma rôznymi osami je identita.*

Dôkaz opäť prenechávame ako cvičenie.

Veta 5.7. *Každá stredová kolineácia je aj osová a obrátene.*

Dôkaz. Nech F je stredová kolineácia so stredom S .

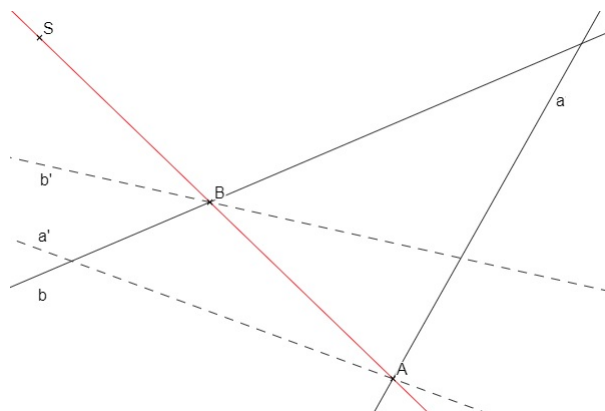
Predpokladajme najskôr, že existuje nejaká samodružná priamka $a \notin Z(S)$ a v druhej časti preskúname prípad keď žiadna taká priamka neexistuje.

Nech X je bod na priamke a . Keďže $a \notin Z(S)$, tak priamka XS je rôzna od samodružnej priamky a . Priamka XS je ale tiež samodružná, lebo S je stred. Podľa dôsledku 5.3 je bod X samodružný. Týmto spôsobom overíme, že každý bod priamky a je samodružný a teda a je osou.

Predpokladajme teraz, že každá priamka $a \notin Z(S)$ nie je samodružná. Zvoľme jednu takú priamku a . Potom a a $a' = F(a)$ sú rôzne priamky a existuje ich priesečník A . Bod A je rôzny od S , lebo leží na priamke a . Priamka $o = AS$ je samodružná, lebo S je stred.

Obraz bodu A v kolineácii F preto leží na priamke o a zároveň na priamke a' . Lenže $o \cap a' = A$ a teda bod A je samodružný.

Ukázali sme, že pre každú priamku $a \notin Z(S)$ dostaneme samodružný bod $A = a \cap F(a)$ rôzny od bodu S . Zvoľme nejakú priamku b neprechádzajúcu bodmi S, A a uvažujme samodružný bod $B = b \cap F(b)$.



Body A, B sú rôzne samodružné body a podľa dôsledku 5.3 je teda priamka AB samodružná priamka. Lenže podľa nášho predpokladu to znamená, že musí prechádzať bodom S .

Ukázali sme, že všetky samodružné body, ktoré takto získame ležia na jednej priamke a tá bude hľadaná os. $\square$

Z posledných dvoch tvrdení vyplýva, že každá neidentická stredová kolineácia má práve jeden stred a práve jednu os. Vzhľadom na ich vzájomnú polohu rozlišujeme dva prípady.

Definícia 5.8. Stredovú kolineáciu F so stredom S a osou o nazývame

- a) homológiou, ak $S \notin o$,
- b) eláciou, ak $S \in o$.

Ostáva rozmyslieť si akým spôsobom vieme homológie a elácie určiť a popísať konštrukcie obrazov bodov v daných kolineáciach.

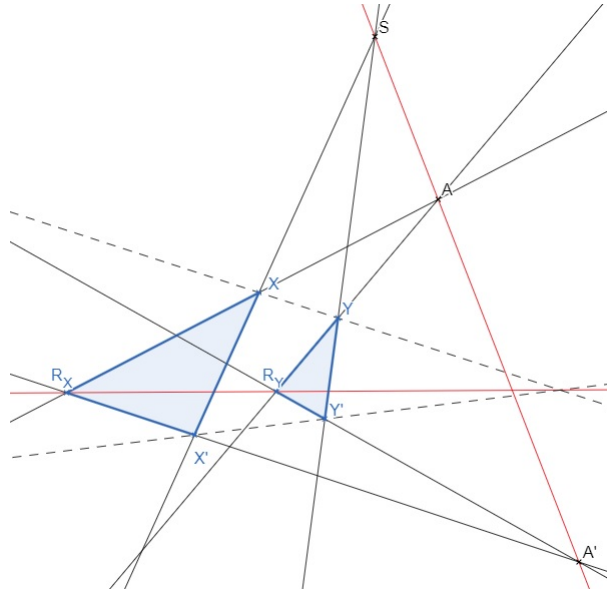
Veta 5.9. *Nech S, A, A' sú tri rôzne kolineárne body a o je priamka neprechádzajúca žiadnym z nich. Potom existuje jediná homológia $\mathcal{H}$ so stredom S a osou o , taká, že $\mathcal{H}(A) = A'$.*

Dôkaz. Existencia. Popíšeme postupne konštrukciu zobrazenia $\mathcal{H}$ a ukážeme, že je to kolineácia s danými vlastnosťami.

Každému bodu R priamky o priradíme $\mathcal{H}(R) = R$ a bodu S priradíme $\mathcal{H}(S) = S$. Body ležiace na priamke SA vyšetríme na koniec samostatne.

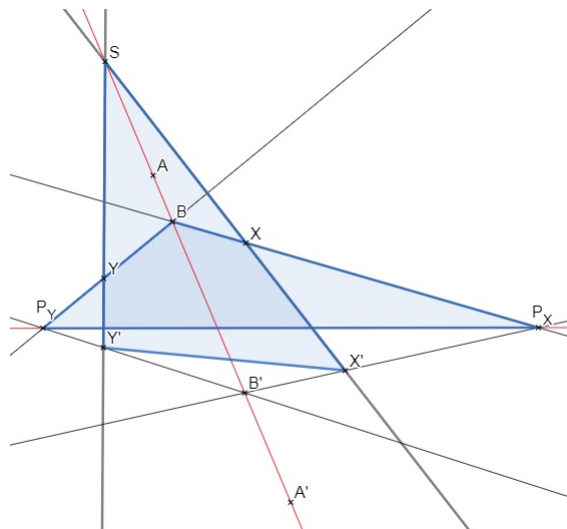
Nech $X \in \bar{\mathbb{E}}_2$ je ľubovoľný bod neležiaci na SA ani o . Máme samodružný bod $R_X = AX \cap o$. Keďže chceme dostať kolíneáciu a body A, X, R_X sú kolíneárne budeme $\mathcal{H}(X)$ hľadať na priamke $A'R_X$. Keďže S je stred, tak priamka SX by mala byť samodružná. Bod $\mathcal{H}(X)$ budeme preto hľadať na priamke SX . Definujme preto

$$\mathcal{H}(X) = [(AX \cap o) \cup A'] \cap SX \quad (5.1)$$



Na obrázku kde je naznačená konštrukcia bodov $X' = \mathcal{H}(X)$ a $Y' = \mathcal{H}(Y)$ vidno, že pre trojuholníky $\triangle X R_X X'$ a $\triangle Y R_Y Y'$ sú body $A = X R_X \cap Y R_Y$, $A' = R_X X' \cap R_Y Y'$ a $S = X X' \cap Y Y'$ kolíneárne a preto z duálnej Desargovej vety vyplýva že priamky XY a $X'Y'$ sa pretnú na osi o .

To využijeme pri konštrukcii obrazu bodu $B \in SA$. Zvoľme pomocný bod $X \in \bar{\mathbb{E}}_2$ neležiaci na SA ani o . Skonstruujme bod $X' = \mathcal{H}(X)$ podľa predpisu (5.1) a označme $P_X = BX \cap o$. Ukážeme, že poloha bodu $B' = P_X X' \cap SA$ nezávisí od voľby X . Nech Y je iný pomocný bod, $Y' = \mathcal{H}(Y)$ a $P_Y = BY \cap o$ ako na obrázku.



Podľa toho, čo sme práve dokázali sa priamky XY a $X'Y'$ pretnú na osi o a teda pre $\triangle BPP_X$ a $\triangle SS'Y'$ platí podľa duálnej Desargovej vety, že priamky BS , P_XX' a $P_Y Y'$ sa pretínajú v jednom bode. Môžeme teda pre bod $B \in SA$ definovať

$$\mathcal{H}(B) = [(BX \cap o) \cup X'] \cap SA \quad (5.2)$$

Týmto sme definovali zobrazenie $\mathcal{H}$ na celej rozšírenej Euklidovej rovine a z predošlého vidno, že to bude kolíneácia so stredom S a osou o .

Jednoznačnosť. Predpokladajme, že kolíneácie $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ obe vyhovujú zadaným podmienkam. Uvažujme kolíneáciu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2^{-1}\mathcal{H}_1$. Zrejme o bude osou a S stredom tejto kolíneácie. Lenže podľa podmienok sa bod A zobrazí na $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}_2^{-1}\mathcal{H}_1(A) = \mathcal{H}_2^{-1}(A') = A$ a je teda samodružný. Nech $a \in Z(A)$ je ľubovoľná priamka. Nech priesečník a s osou o je bod A_0 . Bod A_0 je samodružný lebo leží na osi a podľa dôsledku 5.3 je potom priamka a samodružná. To ale znamená, že A je stred. Podľa tvrdenia 5.6 je potom $\mathcal{H}$ identita, čo ale znamená, že $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ako sme chceli dokázať. $\square$