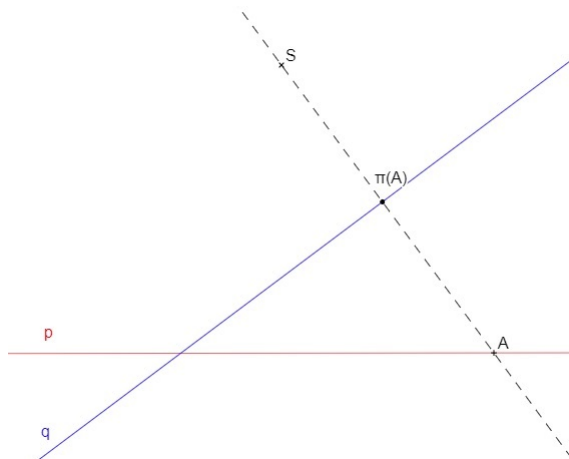


Projektívna geometria

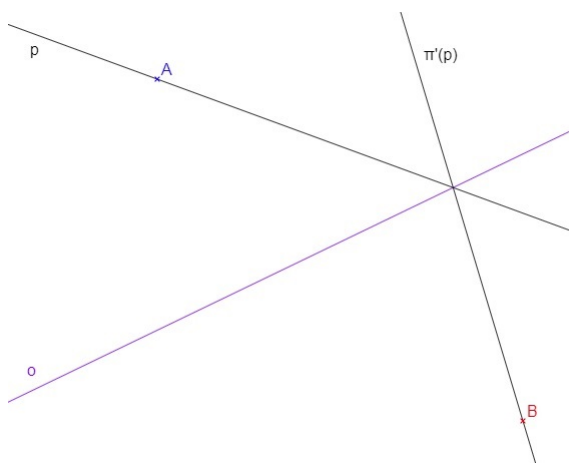
4 Projektívne zobrazenia

Definícia 4.1. Nech sú dané dve rôzne priamky p, q a bod S , ktorý neleží na žiadnej z nich. Zobrazenie $\pi: R(p) \rightarrow R(q)$ dané $\pi(A) = AS \cap q$ sa nazýva perspektívnosť so stredom S .

Nech sú dané dva rôzne body A, B a priamka o neprechádzajúca žiadnym z nich. Zobrazenie $\pi': Z(A) \rightarrow Z(B)$ dané $\pi'(p) = (p \cap o) \cup B$ sa nazýva perspektívnosť s osou o .



obr.1



obr. 2

Perspektívnosti definované v rozšírenej Euklidovej rovine sú vždy bijektívne zobrazenia a preto ak bod $\pi(A)$ je obrazom bodu A v perspektívnosti so stredom S , tak bod A je obrazom bodu $\pi(A)$ v inverznej perspektívnosti $\pi^{-1}: R(q) \rightarrow R(p)$ tiež so stredom S .

Vďaka tomu môžeme hovoriť, že body A a $\pi(A)$ v obr. 1 sú vo vzťahu perspektívnosti so stredom S a značíme $A \stackrel{S}{\underset{\wedge}{=}} \pi(A)$. Duálne, v obr. 2 priamky p a $\pi'(p)$ sú vo vzťahu perspektívnosti s osou o a značíme $p \stackrel{o}{\underset{\wedge}{=}} \pi'(p)$.

Keď sa podrobne zamyslíme nad postupom, ktorými boli bod $\pi(A)$ a priamka $\pi'(p)$ skonštruované, zistíme, že v oboch prípadoch konštrukcia pozostávala z dvoch krokov, čo nás privádza k nasledujúcej definícii.

Definícia 4.2. Nech je daná priamka o a bod S neležiaci na nej.

Zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in R(o)$ priradí priamku AS sa nazýva elementárna perspektívnosť a značíme $o \stackrel{S}{\underset{\wedge}{=}}$.

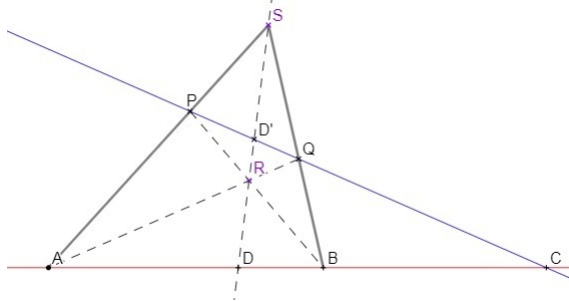
Naopak, zobrazenie, ktoré každej priamke $p \in Z(S)$ priradí bod $p \cap o$ sa nazýva elementárna perspektívnosť a značíme $S \stackrel{o}{\underset{\wedge}{=}}$.

Perspektívnosti π a π' môžeme vyjadriť ako zloženia dvoch elementárnych perspektívností nasledovne $\pi: p \stackrel{S}{\underset{\wedge}{=}} q$, resp. $\pi': A \stackrel{o}{\underset{\wedge}{=}} B$.

Je prirodzené, že tak ako sme zložením dvoch elementárnych perspektívností dostali klasickú perspektívnosť, rovnako možno skladať ľubovoľný konečný počet perspektívností.

Definícia 4.3. Ľubovoľné zobrazenie, ktoré možno vyjadriť ako zloženie konečne veľa perspektívností sa nazýva projektívne zobrazenie alebo projektívnosť.

Príklad. Uvažujme známy obrázok konštrukcie štvrtého harmonického bodu a označme $p = AB$, $q = CP$ a $D' = SR \cap q$.

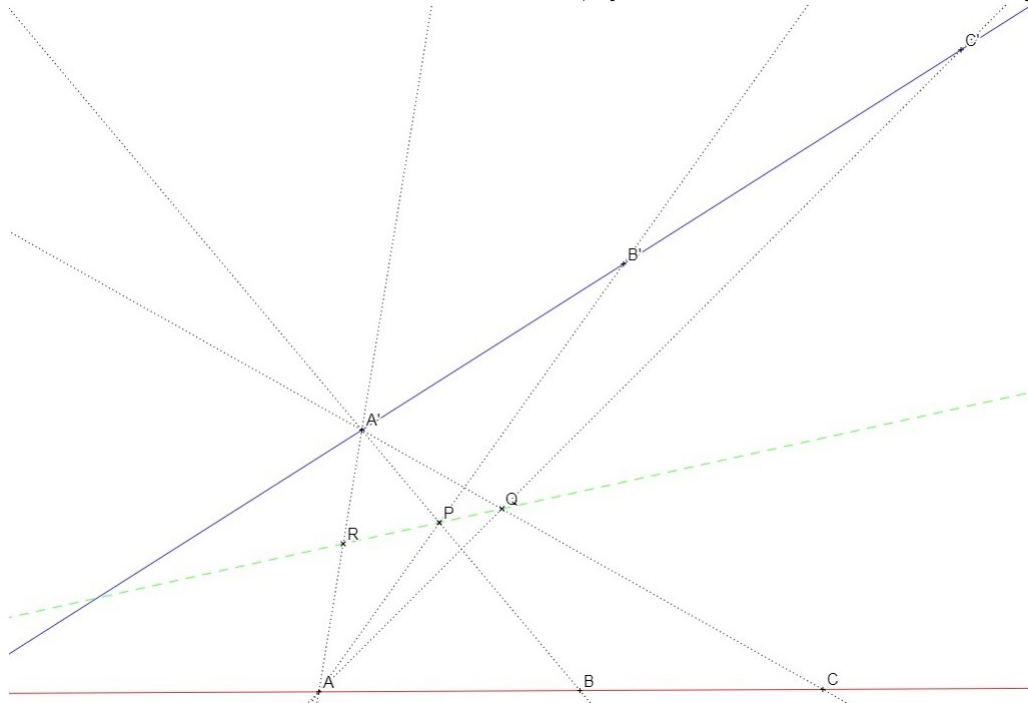


Perspektívnosť $p \stackrel{S}{\underset{\wedge}{=}} q$ zobrazí postupne body A, B, C, D na P, Q, C, D' .

Perspektívnosť $p \underset{\wedge}{=} R \underset{\wedge}{=} q$ zobrazí postupne body A, B, C, D na Q, P, C, D' .
 Projektívnosť daná $p \underset{\wedge}{=} S \underset{\wedge}{=} q \underset{\wedge}{=} R \underset{\wedge}{=} p$ zobrazí postupne body A, B, C, D na B, A, C, D .

Tvrdenie 4.4. Pre každú trojicu kolineárnych bodov A, B, C a každú trojicu kolineárnych bodov A', B', C' existuje projektívnosť π , taká, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$ a $\pi(C) = C'$.

Dôkaz. Predpokladajme najskôr že priamky na ktorých ležia dané trojice bodov sú rôzne a označme $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $R = AA' \cap PQ$.



Zloženie $AB \underset{\wedge}{=} A' \underset{\wedge}{=} PQ \underset{\wedge}{=} A \underset{\wedge}{=} A'B'$ je hľadaná projektívnosť.

Ak všetky body ležia na tej istej priamke p uvažujme pomocný bod S mimo nej a priamku q neprechádzajúcu žiadnym z bodov A, B, C, A', B', C', S .

Definujme perspektívnosť $\pi_1: p \underset{\wedge}{=} S \underset{\wedge}{=} q$ a označme A_1, B_1, C_1 obrazy bodov A', B', C' v tejto perspektívnosti. Potom pre kolineárne trojice A, B, C a A_1, B_1, C_1 skonštruujeme projektívnosť π_0 , ktorá zobrazí A, B, C v poradí na A_1, B_1, C_1 podľa predošlého postupu. Projektívnosť $\pi_1^{-1}\pi_0$ je hľadanou projektívnosťou. $\square$

Je dôležité si uvedomiť, že napriek tomu, že sme skonštruovali požadovanú projektívnosť, nie je zatiaľ úplne jasné, či by nemohla existovať aj nejaká iná, ktorá by spĺňala danú požiadavku. Touto otázkou sa budeme zaoberať neskôr.

Už teraz ale môžeme rozhodnúť, že podobná veta pre štvorice kolineárnych bodov nebude platiť. Ak sú totiž body A, B, C, D štyri harmonické body, tak pre ľubovoľný s nimi nekolineárny bod S budú priamky SA, SB, SC, SD tvoriť harmonickú štoricu priamok. Podobné tvrdenie platilo pre štyri harmonické priamky. To znamená, že ľubovoľná elementárna perspektívnosť zobrazí štyri harmonické body (priamky) vždy na štyri harmonické priamky (body). Keďže projektívnosť nie je nič iné ako zloženie elementárnych perspektívností, musí zachovávať harmonickosť tiež.