Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

1. Pre každú sadu lineárne nezávislých vektorov určte sadu ortogonálnych vektorov generujúcich rovnaký podpriestor.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

d) Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vzhľadom na skalárny súčin daný

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \sum_{i=1}^{3} i x_i y_i.$$

e) Funkcie $1, \cos(x), \cos^2(x)$ v priestore spojitých funkcií definovaných na intervale $[-\pi, \pi]$ so skalárnym súčinom $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Použite vzťah $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

f) Funkcie $1, x, x^2, x^3$ v priestore polynomických funkcií definovaných na intervale $[0, \infty)$ so skalárnym súčinom daným

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$$

2. Určte nejakú ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^3$ obsahujúcu vektor $\mathbf{v_1} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$. Určte ešte nejakú inú ďalšiu (takú, že neobsahuje rovnaké vektory len v inom poradí) a maticu prechodu P medzi nimi. Vypočítajte súčin $P^T P$.