Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

Uvažujme na priestore spojitých funkcií definovaných na intervale $[-1, 1]$ nasledovný skalárny súčin

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Je dôležité si uvedomiť, že tento integrál vždy existuje, lebo spojité funkcie na kompaktnom intervale sú ohraničené a platí

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin(x)]_{-1}^{1} = \pi. \tag{1}$$

Pre spojité funkcie $(1, x, x^2, x^3)$ vykonajme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizáciu.
Budeme potrebovať hodnoty skalárnych súčinov $\langle x^a, x^b\rangle$ pre $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Rozlíšime dva prípady. Ak je súčet $a+b$ nepárny, tak x^{a+b} je nepárna funkcia a preto

$$\langle x^a, x^b\rangle = \int_{-1}^{1} x^{a+b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0. \tag{2}$$

Ak je súčet $a + b$ párny, potrebujeme vypočítať nasledovný integrál

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{3}$$

Podľa (1) je $I_0 = \pi$.

Nech odteraz $n \geq 1$. Úpravami a pomocou per partes dostaneme

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} x^{2n-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{-1}^{1} x^{2n-1}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} u = x^{2n-1} & u' = (2n-1)x^{2n-2} \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & v = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} (2n-1)x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}dx,$$

pretože uv má hodnoty nula v oboch krajných bodoch integrálu.

Ľahko vidno, že pre $n = 1$ dostaneme (nakreslite si obrázok)

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (2-1)x^{2-2}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Pre $n \geq 2$ použijeme per partes znova a odvodíme

$$I_n = \int_{-1}^{1} (2n-1)x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{cc} u = x^{2n-3} & u' = (2n-3)x^{2n-4} \\ v' = x\sqrt{1-x^2} & v = \frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{-1}^{1} (2n-1)(2n-3)x^{2n-4}\left(\frac{-1}{3}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (2n-1)(2n-3)x^{2n-4}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx,$$

čo po roznásobení $(1-x^2)$ dáva rozdiel násobkov dvoch integrálov

$$\frac{2n-1}{3}\int_{-1}^{1} (2n-3)x^{2n-4}\sqrt{1-x^2}dx - \frac{2n-3}{3}\int_{-1}^{1} (2n-1)x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}dx,$$

z ktorých prvý je I_{n-1} a druhý je I_n. Máme teda

$$I_n = \frac{2n-1}{3}I_{n-1} - \frac{2n-3}{3}I_n,$$

z čoho dostaneme

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}. \tag{5}$$

Nám stačí vedieť, že

$$I_2 = \frac{3}{4}I_1 = \frac{3}{8}\pi, \tag{6}$$

$$I_3 = \frac{5}{6}I_2 = \frac{5}{16}\pi. \tag{7}$$

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Máme $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = (1, x, x^2, x^3)$ a potrebujeme dostať ortogonálne $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$.

Zrejme $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} = 1$ a vektor $\mathbf{v_2}$ hľadáme v tvare $\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \alpha_{1,2}\mathbf{v_1}$, pričom má platiť

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle &= \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,2}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle \\ &= \langle x, 1 \rangle - \alpha_{1,2}\langle x, x \rangle \\ &= 0 - \alpha_{1,2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

a teda $\alpha_{1,2} = 0$ a $\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} = x$ (využili sme vzťahy (2) a (4)).

Podobne s využitím (2),(4) a (6) pre $\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \alpha_{1,3}\mathbf{v_1} - \alpha_{2,3}\mathbf{v_2}$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1} \rangle &= \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,3}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{2,3}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle \\ &= \frac{\pi}{2} - \alpha_{1,3}\pi, \end{aligned}$$

z čoho $\alpha_{1,3} = \frac{1}{2}$ a

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2} \rangle &= \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{1,3}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{2,3}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle \\ &= 0 - \alpha_{2,3}\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

z čoho $\alpha_{1,3} = 0$ a teda $\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \frac{1}{2}\mathbf{u_1} = x^2 - \frac{1}{2}$.

Nakoniec pre $\mathbf{v_4} = \mathbf{u_4} - \alpha_{1,4}\mathbf{v_1} - \alpha_{2,4}\mathbf{v_2} - \alpha_{3,4}\mathbf{v_3}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v_4}, \mathbf{v_1} \rangle &= \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,4}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{2,4}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{3,4}\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1} \rangle \\ &= 0 - \alpha_{1,4}\pi, \\ 0 = \langle \mathbf{v_4}, \mathbf{v_2} \rangle &= \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{1,4}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{2,4}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{3,4}\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2} \rangle \\ &= \frac{3}{8}\pi - \alpha_{2,4}\frac{\pi}{2}, \\ 0 = \langle \mathbf{v_4}, \mathbf{v_3} \rangle &= \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{v_3} \rangle - \alpha_{1,4}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} \rangle - \alpha_{2,4}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \rangle - \alpha_{3,4}\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_3} \rangle \\ &= 0 - \alpha_{3,4}\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Teda $\mathbf{v_4} = \mathbf{u_4} - \frac{3}{4}\mathbf{u_2} = x^3 - \frac{3}{4}x$.

Polynómy $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}) = (1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{4}x)$ sú ortogonálne vzhľadom na daný skalárny súčin. Je zrejmé, že možno pokračovať v tomto procese aj ďalej a určiť polynóm $\mathbf{v_5}$ štvrtého stupňa, polynóm $\mathbf{v_6}$ piateho stupňa atď. a dostať nekonečnú postupnosť ortogonálnych polynómov. Ak ich znormalizujeme tak, aby ich hodnota v bode 1 bola 1 dostaneme *Čebyševove polynómy*, t.j. polynómy

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \mathbf{v_1} = 1, \\ T_1(x) &= \mathbf{v_2} = x, \\ T_2(x) &= 2\mathbf{v_3} = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4\mathbf{v_4} = 4x^3 - 3x, \\ &\vdots \end{aligned}$$