Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

V akom vzťahu sú výpočty $\alpha_{i,j}$ so symetrickými úpravami matice $G(U)$?

Ilustrujme si to pre $n = 3$. Máme

$$G(U) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle & \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_3} \rangle \\ \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3} \rangle \\ \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_1} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_3} \rangle \end{pmatrix}.$$

Rovnica $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$ nám dá

$$G(U) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{u_3} \rangle \\ \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3} \rangle \\ \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_2} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_3} \rangle \end{pmatrix}.$$

Rovnica

$$\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,2} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle = 0$$

určila $\alpha_{1,2}$, práve také, že odčítanie $\alpha_{1,2}$–násobku prvého riadku od druhého a $\alpha_{1,2}$–násobku prvého stĺpca od druhého nám upraví maticu $G(U)$ na tvar

$$P_1^T G(U) P_1 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle & 0 & \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{u_3} \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{u_3} \rangle \\ \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_2} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_3} \rangle \end{pmatrix},$$

kde

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z predpisu $\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \alpha_{1,3}\mathbf{v_1} - \alpha_{2,3}\mathbf{v_2}$ a využitím kolmosti $\mathbf{v_1} \perp \mathbf{v_2}$ dostaneme pre $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}$ rovnice

$$\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,3} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{v_2} \rangle - \alpha_{2,3} \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle = 0.$$

Opäť $\alpha_{1,3}$ a $\alpha_{2,3}$ určujú presne aké násobky prvého a druhého riadku (stĺpca) je potrebné odčítať od tretieho aby sme dostali na príslušných miestach nuly, t.j. máme

$$P_2^T (P_1^T G(U) P_1) P_2 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_3} \rangle \end{pmatrix},$$

kde

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & -\alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samozejme, $P = P_1P_2$ prevedie vektory $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n})$ na $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n})$ rovnako ako predtým $V = UP$ a

$$G(V) = G(UP_1P_2) = P_2^T(P_1^T G(U) P_1)P_2 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_3} \rangle \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že rozdiel spočíva len v tom akým spôsobom diagonalizujeme $G(U)$. Dá sa to robiť takto

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

alebo aj takto

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$