# Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

Nech $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ sú lineárne nezávislé vektory. Ako získať ortogononálne vektory $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$, ktoré generujú rovnaký podpriestor?

Namiesto toho aby sme prešli od $n$–tice $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n})$ priamo k $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n})$ budeme opakovane ortogonalizovať vždy po jednom vektore.

Na začiatok položme $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$. Zrejme platí $[\mathbf{u_1}] = [\mathbf{v_1}]$ a teda aj

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}]. \tag{1}$$

Teraz hľadajme $\mathbf{v_2}$ tak aby $[\mathbf{v_1}, \mathbf{u_2}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$ a aby $\mathbf{v_2} \perp \mathbf{v_1}$. Nech

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \alpha_{1,2}\mathbf{v_1}, \tag{2}$$

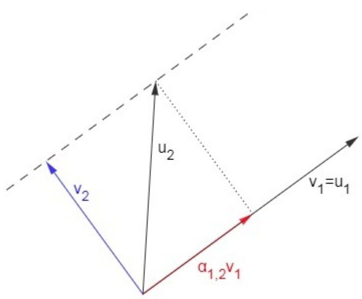
pričom $\alpha_{1,2}$ je také číslo, aby $\mathbf{v_2} \perp \mathbf{v_1}$. Teda riešime rovnicu

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} \rangle - \alpha_{1,2}\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Keďže koeficient pri neznámej $\alpha_{1,2}$ je kladné číslo $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle$, dostaneme jednoznačné riešenie a dosadením do (2) vypočítame vektor $\mathbf{v_2}$.
Z jeho predpisu vyplýva, že $[\mathbf{v_1}, \mathbf{u_2}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$ a podľa (1) teda aj

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{u_3}, \ldots, \mathbf{u_n}]. \tag{3}$$

Geometricky sme vektor $\mathbf{u_2}$ vykolmili na vektor $\mathbf{v_1}$ vhodným posunutím.

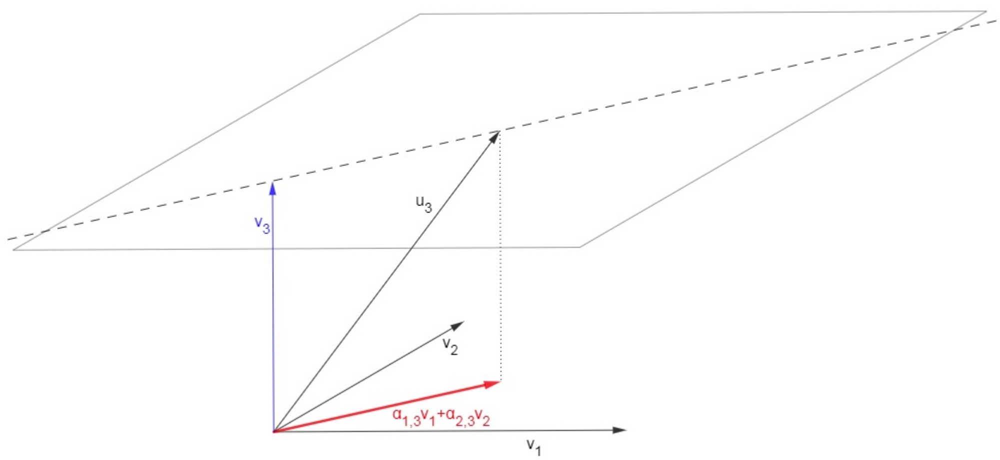



Tento krok budeme opakovať.

Vektor $\mathbf{v_3}$ budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \alpha_{1,3}\mathbf{v_1} - \alpha_{2,3}\mathbf{v_2}, \tag{4}$$

pričom $\alpha_{1,3}$ a $\alpha_{2,3}$ dostaneme riešením rovníc $\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1} \rangle = 0$ resp. $\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2} \rangle = 0$.




Zrejme z predpisu (4) a vzťahu (3) máme

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{u_3}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{u_n}]. \tag{5}$$

Týmto spôsobom pokračujme až po $\mathbf{v_n}$, kde

$$\mathbf{v_n} = \mathbf{u_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n}\mathbf{v_i}$$

a nakoniec

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}].$$