Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

Nech $U = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Príslušná Gramova matica pre stĺpce U je

$$G(U) = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -18 & 45 & -18 \\ 9 & -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

Vykonáme symetrické úpravy.

$$\begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -18 & 45 & -18 \\ 9 & -18 & 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D = G(V)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Určíme maticu V.

$$V = UP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sú ortogonálne.

Keďže matica P je regulárna (dokonca horná trojuholníková s jednotkami na diagonále), tak vektory $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ a $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ generujú ten istý podpriestor.
Táto metóda je rýchla, ale je to "abstract nonsense" a nie je veľmi jasné čo sa vlastne s vektormi $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ v tomto procese deje. Pozrime sa na to v ďalšom viac geometricky.