Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

Nech $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ sú lineárne nezávislé vektory. Ako získať ortogononálne vektory $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$, ktoré generujú rovnaký podpriestor?

Postup pomocou diagonalizácie Gramovej matice.
Označme $U = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n})$ maticu, ktorej stĺpce sú dané vektory. Gramova matica $G(U) = G(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n})$ je daná

$$G(U) = (\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle), \tag{1}$$

teda ako $n \times n$ matica, kde v i–tom riadku a j–tom stĺpci sa nachádza skalárny súčin $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle$.
Keďže predpokladáme, že vektory sú lineárne nezávislé, Gramova matica bude kladne definitná. Existuje preto postupnosť symetrických úprav, ktoré ju diagonalizujú, t.j. $G(U) \equiv D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, kde všetky d_i sú kladné čísla. Túto kongruenciu môžeme vyjadriť nasledovne

$$D = P^T G(U) P, \tag{2}$$

teda, že D bola získaná z pôvodnej $G(U)$ pomocou stĺpcových oprácií zaznamenaných v matici P a riadkových v matici P^T.

Matica D je ale opäť Gramovou maticou nejakej usporiadanej n–tice vektorov a v tom je celý trik. Aby sme to videli, vráťme sa k definícii (1).
Štandardný skalárny súčin vektorov $\mathbf{u_i}$ a $\mathbf{u_j}$ je to isté ako (maticový) súčin riadka $\mathbf{u_i}^T$ a stĺpca $\mathbf{u_j}$. Teda $G(U)$ je $n \times n$ matica, kde v i–tom riadku a j–tom stĺpci sa nachádza súčin $\mathbf{u_i}^T \mathbf{u_j}$, ale to je rovnaká matica ako by sme dostali násobením matice U^T a matice U. Preto $G(U) = U^T U$.[1] Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$D = P^T G(U) P = P^T U^T U P = (UP)^T UP = G(UP).$$

Označme $V = UP$ a jej stĺpce $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. Potom Gramova matica pre usporiadanú n–ticu vektorov $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ je

$$G(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}) = G(V) = G(UP) = D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Keďže Gramova matica vektorov $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ je diagonálna, sú tieto vektory ortogonálne.

[1] Pre nejaký neštandardný skalárny súčin daný $\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle = \mathbf{u_i}^T A \mathbf{u_j}$ potom dostaneme $G(U) = U^T A U$.