Stredové premietanie

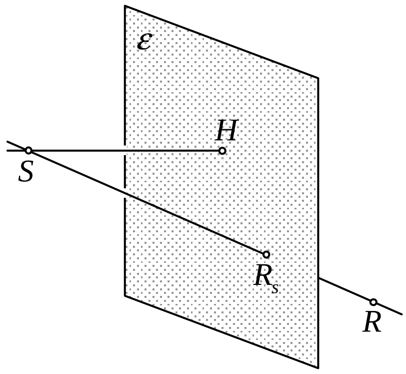
Syntetický prístup

Základom tohto premietania je premietanie z vlastného bodu rozšíreného euklidovského priestoru E^3_∞ do roviny. Rozšírený euklidovský priestor je E^3_∞ je určený euklidovským priestorom E^3, ktorý je doplnený o nevlastné body, nevlastné priamky.

Nevlastný bod priamky U∞ je spoločným bodom všetkých priamok osnovy obsahujúcej danú priamku.

Nevlastá priamka roviny u∞ je spoločnou priamkou všetkých rovín osnovy, do ktorej patrí daná rovina.

Nech ε je rovina rozšíreného euklidovského priestoru E^3_∞ a bod S nepatrí rovine ε. Zobrazenie $\sigma : E^3_\infty - \{S\} \to \varepsilon$, ktoré bodu $R \neq S$ priradí priesečník priamky SR s rovinou ε $R_S = SR \cap \varepsilon$, nazývame ***stredové premietanie z bodu S do roviny ε***.

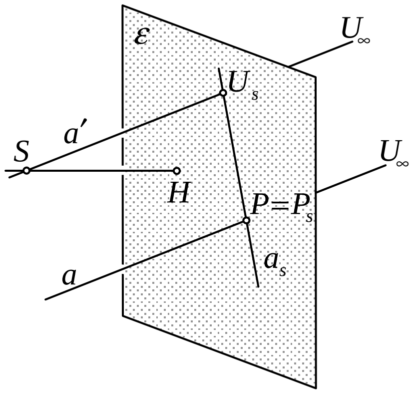


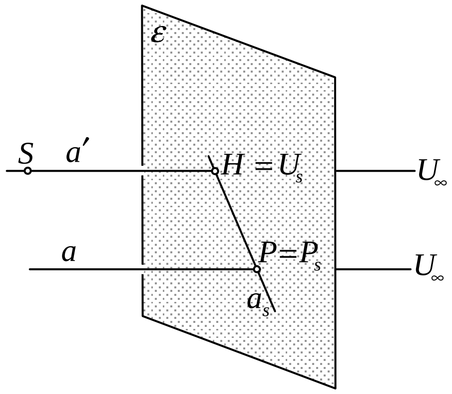
Bod S nazývame ***stred premietania*** a rovinu ε ***priemetňa***. Priamku SR nazývame ***stredovo premietacia priamka bodu R***.Priesečník R_S stredovo premietacej priamky bodu s priemetňou ε nazývame ***stredový priemet bodu***. Polohu bodu S vzhľadom na priemetňu ε určíme pätou H kolmice v bode S na priemetňu ε. Bod H nazývame ***hlavný bod*** a číslo $d = |SH|$ ***dištancia***.

Príklady:

1.Nech priamka a nemá osobitnú polohu vzhľadom na priemetňu ε. Stredový priemet priamky a určíme pomocou stredových priemetov bodov:

- $P = a \cap \varepsilon$ (P stopník priamky)
- U_∞ nevlastný bod priamky a





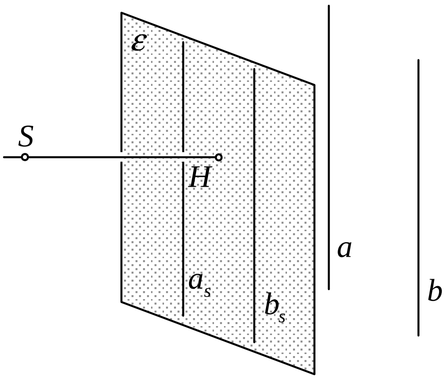
Pre stredové priemety platí

- Stopník $P = P_S$
- Nevlastný bod U_∞ je spoločným bodom všetkých priamok osnovy obsahujúcej danú priamku a a teda aj priamky a', ktorá prechádza stredom S. Určíme priesečník priamky a' s priemetňou: $a' \cap \varepsilon = U_S$ je to stredový priemet nevlastného bodu U_∞ do priemetne ε a nazývame ho ***úbežník priamky***

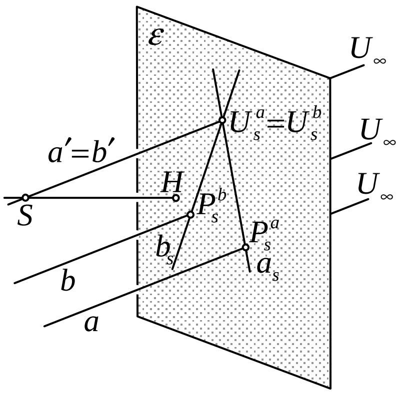
Ak priamka a je kolmá na priemetňu ε, tak jej úbežník je totožný s hlavným bodom.

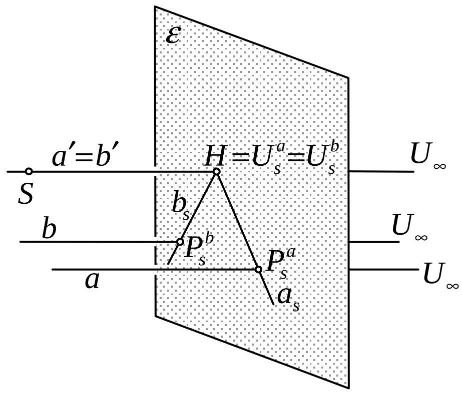
2.Nech a, b sú rovnobežky a ak:

- sú rovnobežné s priemetňou ε, tak ich stredové priemety sú rovnobežky $a_S \parallel b_S$



- nie sú rovnobežné s priemetňou ε, tak majú spoločný nevlastný bod U_∞ a jeho stredový priemet – úbežník U_S je bodom každej z priamok a_S, b_S t.j sú rôznobežky

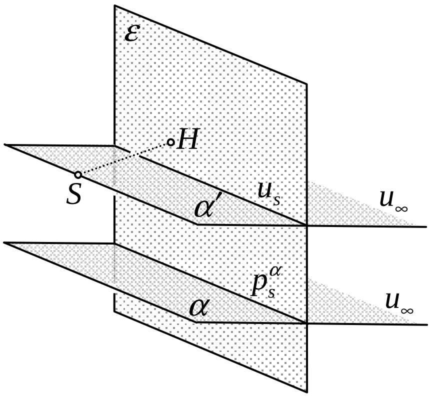


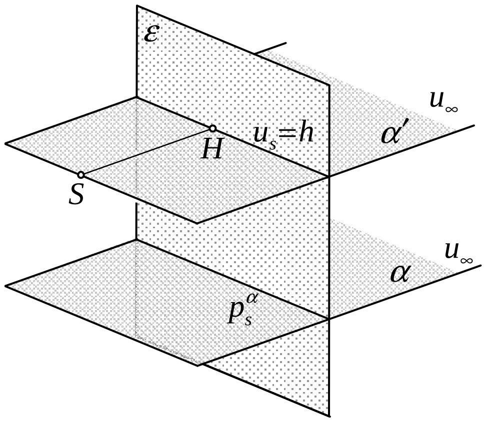


- sú kolmé na priemetňu ε, tak ich stredové priemety prechádzajú hlavným bodom

3.Nech rovina α nemá osobitnú polohu vzhľadom na priemetňu ε. Určíme stredový priemet roviny pomocou stredového priemetu dvoch priamok:

- priesečnice roviny α s priemetňou: $\alpha \cap \varepsilon = p^\alpha$ (stopa roviny)
- nevlastnej priamky roviny u_∞





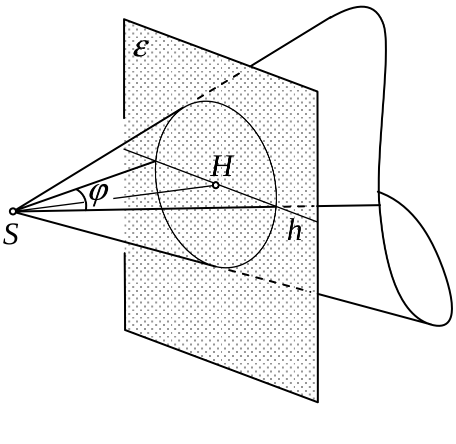
Pre stredové priemety platí

- Stopa roviny: $p^\alpha = p_S^\alpha$
- Nevlastná priamka u_∞ je spoločnou priamkou rovín osnovy obsahujúcej rovinu α a teda aj roviny α', ktorá prechádza stredom *S*. Priesečnica roviny α' s priemetňou ε: $\alpha' \cap \varepsilon = u_S$, je priamka u_S, ktorá je stredovým priemetom nevlastnej priamky u_∞ a nazývame ju ***úbežnica roviny***.

Ak je rovina α kolmá na priemetňu , tak jej úbežnica inciduje s hlavným bodom a nazýva sa ***horizont h***.
Ak rovina $\alpha \parallel \varepsilon$, tak úbežnica aj stopa roviny sú nevlastné priamky priemetne.

<u>Lineárna perspektíva</u>

Stredové premietanie v takomto všeobecnom tvare zobrazuje všetky body priestoru, čo však nezodpovedá spôsobu vnímania priestoru človekom - pozorovateľom, pretože ak nehýbeme okom, tak nevidíme všetky body priestoru okolo nás (napr. čo je za pozorovateľom ale ani to čo je bokom od pozorovateľa).

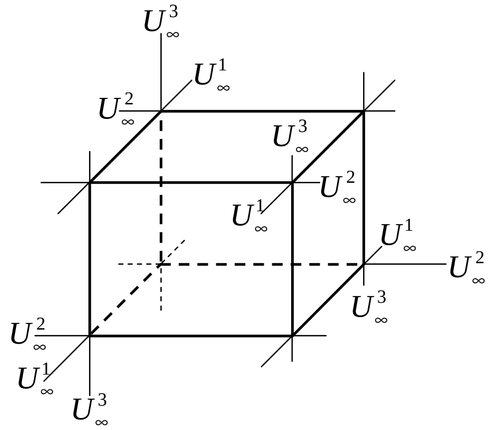


Ľudské oko je schopné vnímať tú časť priestoru, ktorá patrí ***zornému kužeľovému priestoru.*** Hranicu tohto priestoru tvorí ***zorná kužeľová plocha***, ktorou sa orezáva scéna. Vrchol je v optickom strede *S* a os je totožná s optickou osou oka *SH*. Vrcholový uhol pre ostré videnie je pomerne malý, ale uspokojivé obrázky sa získajú pre vrcholový uhol $\varphi \in \langle 40°, 90° \rangle$ t.j. ich stredové priemety ležia vnútri ***zorného kruhu*** so stredom v hlavnom bode *H*. Odporúča sa pre dištanciu d : $r \le d \le 3r$, kde r je polomer zorného kruhu a $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d}$.

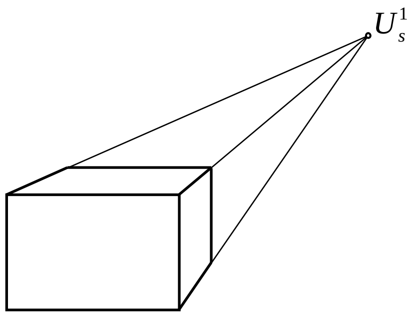
Stredové premietanie, v ktorom zobrazujeme objekty ležiace v priestore ohraničenom zornou kužeľovou plochou, nazývame ***lineárna perspektíva***.

Priemety vytvorené v lineárnej perspektíve pôsobia realistickým dojmom „ majú hĺbku“. Pri zobrazovaní objektov v lineárnej perspektíve je potrebné si uvedomiť koľko osnov sa na objekte nachádza.

Príklad
Kváder má tri osnovy t.j. tri nevlastné body a ich stredové priemety - úbežníky môžu byť vlastné alebo nevlastné.

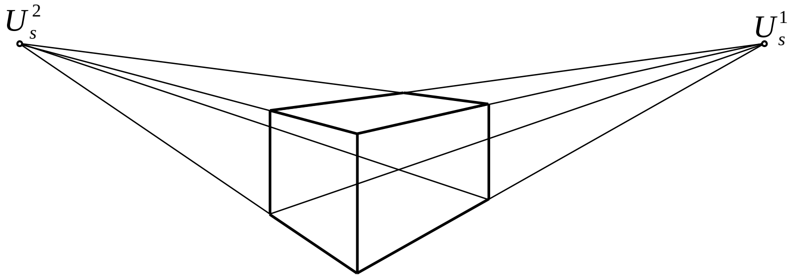


Sú možné tri rôzne polohy kvádra a priemetne ε:
• kváder v priečelnej polohe: dve osnovy sú rovnobežné s priemetňou (nevlastné úbežníky) a jedna osnova je rôznobežná (vlastný úbežník U^1_S)



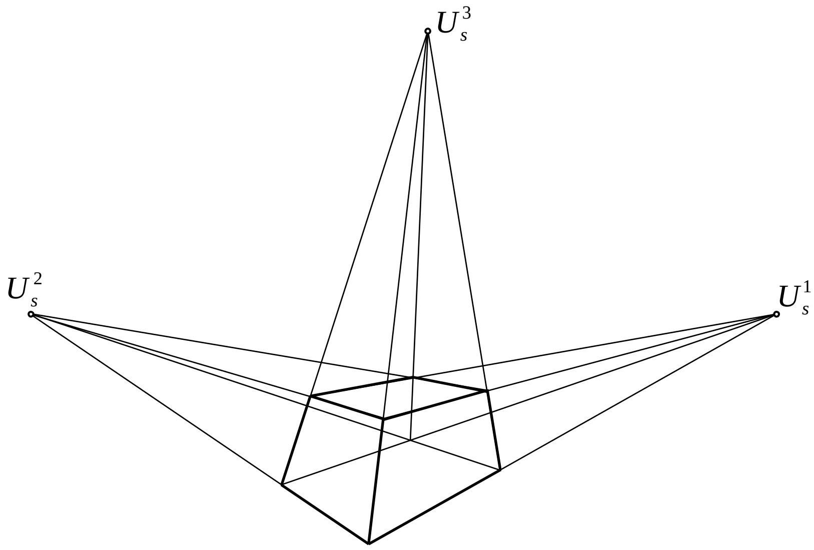
jednoúbežníková metóda

• kváder v nárožnej polohe: jedna osnova je rovnobežná s priemetňou (nevlastný úbežník) a dve osnovy rôznobežné (dva vlastné úbežníky U^1_S, U^2_S)



dvojúbežníková metóda

• kváder nemá špeciálnu polohu: všetky tri osnovy sú rôznobežné s priemetňou (tri vlastné úbežníky U_S^1, U_S^2, U_S^3)

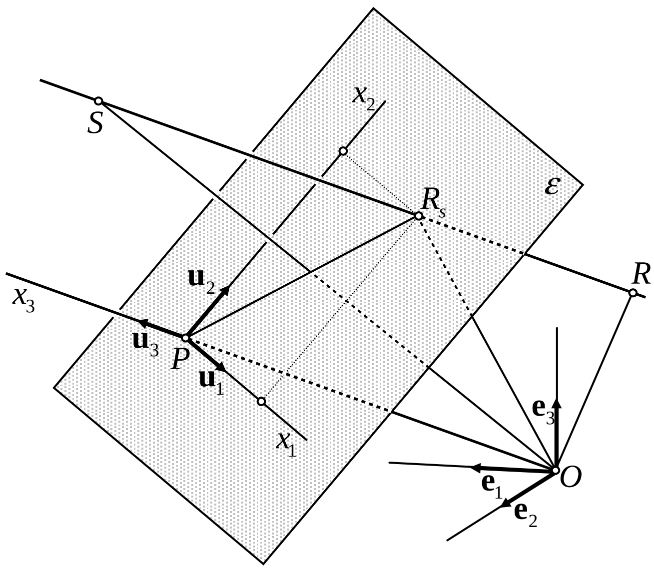


trojúbežníková metóda

Poznámka: Objekt, ktorý nemá osnovy priamok, nemá úbežníky.
Objekt, ktorý má veľa osnov priamok, má veľa úbežníkov.

Analytický prístup pre stredové premietanie

V priestore E^3 je afinná súradnicová sústava $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a bod S . V tomto priestore zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, kde $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ je súradnicová sústava priemetne ε.



Nech R je bod priestoru E^3 má vzhľadom na $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ súradnice $\left(x^R, y^R, z^R\right)$. Stredový priemet bodu R je priesečník stredovo premietacej priamky SR s priemetňou ε: $R_S = SR \cap \varepsilon$.

Vyjadríme polohu bodu R_S vzhľadom na súradnicovú sústavu $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Platí: $$R_S = P + x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \qquad (1)$$

$$R_S = S + x_3(R - S) \qquad (2)$$

kde čísla x_1, x_2, x_3 sú súradnice bodu R_S v súradnicovej sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$. Z vyjadrení (1) a (2) určíme rovnosť :

$$(S - P) + x_3(R - S) = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \qquad (3)$$

a neznáme čísla x_1, x_2, x_3 určíme postupne:

1. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $\mathbf{u}_2 \times (R - S)$ a vyčíslime:

$$x_1 = \frac{(R-S)\cdot(\mathbf{u}_2 \times (P-S))}{(R-S)\cdot(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)} \qquad (4)$$

2. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $\left((R-S)\times\mathbf{u}_1\right)$ a vyčíslime :

$$x_2 = \frac{(R-S)\cdot((P-S)\times\mathbf{u}_1)}{(R-S)\cdot(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)} \qquad (5)$$

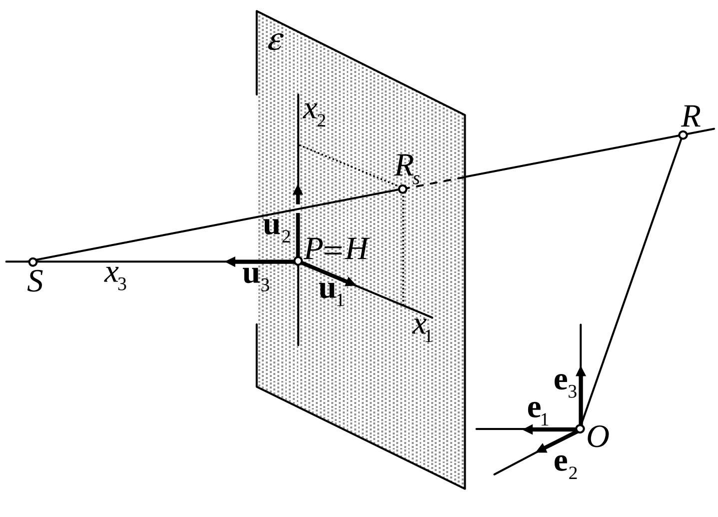
3. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $\left(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\right)$ a vyčíslime

$$x_3 = \frac{(P-S)\cdot(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)}{(R-S)\cdot(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)} \qquad (6)$$

Vyčíslené hodnoty (4), (5) sú súradnice x_1, x_2 stredového priemetu R_S bodu R v sústave súradníc priemetne ε.

Voľba priemetne a stredu premietania je niekedy náročná, najmä pre neskúseného návrhára a preto sa ponúkajú nasledovné možnosti, ktoré sú špeciálnym prípadom doteraz prezentovaného umiestnenia.

• Bod P totožný s hlavným bodom H, t.j. $SP \perp \varepsilon$:



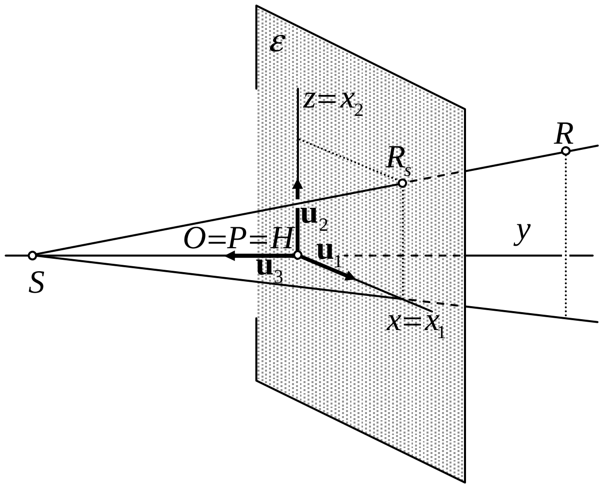
Číslo $d = |SH|$ je dištancia a bod S môžeme vyjadriť : $S = P + d\mathbf{u}_3$, vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ tvoria ortonormálnu bázu. Po dosadení do vzťahov (4), (5), (6) dostávame:

$$x_1 = \frac{-d\cdot(R-P).\mathbf{u}_1}{(R-P)\cdot\mathbf{u}_3 - d}$$

$$x_2 = \frac{-d \cdot (R-P).\mathbf{u}_2}{(R-P)\cdot \mathbf{u}_3 - d}$$
$$x_3 = \frac{-d}{(R-P)\cdot \mathbf{u}_3 - d}$$

• Štandardom pri umiestňovaní priemetne ε vzhľadom na pravouhlý trojhran *Oxyz* je stotožnenie priemetne ε s jednou zo stien tohto trojhranu. V tomto texte priemetňa ε je totožná so stenou $\nu = xz$ (v iných textoch so stenou $\pi = xy$) a predpokladá sa, že zobrazovaná scéna leží z hľadiska pozorovateľa „za priemetňou“ teda v opačnom polpriestore vzhľadom na priemetňu ako je stred premietania.

Pri uvedenej voľbe $\varepsilon = \nu = xz$ majú vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ v sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ súradnice $\mathbf{u}_1(1,0,0)$, $\mathbf{u}_2(0,0,1)$, $\mathbf{u}_3(0,-1,0)$ a bod $S(0,d,0)$, pričom $d < 0$:



Súradnice stredového priemetu bodu v sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ vyčíslime:

$$x_1 = \frac{d \cdot x^R}{d + y^R} \qquad x_2 = \frac{d \cdot z^R}{d + y^R} \qquad x_3 = \frac{d}{d + y^R} \qquad (7)$$

Analytické vyjadrenie stredového premietania v odpovedajúcich homogenných súradniciach (vynechané označenie konkrétneho bodu):

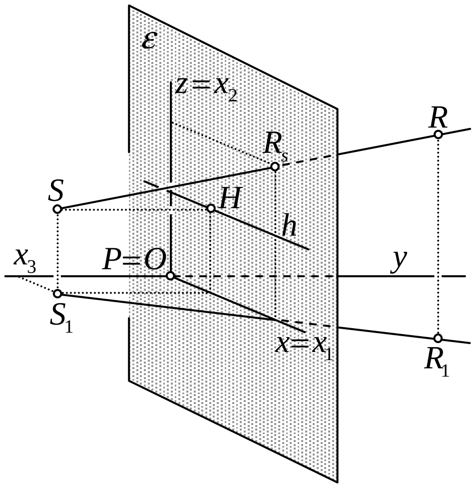
$$X_1 = d.x \qquad X_2 = d.z \qquad X_3 = d \qquad W = d + y$$

Pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & d \end{pmatrix}$$

Analytický prístup pre lineárnu perspektívu

Štandardom pre lineárnu perspektívu je incidencia priemetne ε so stenou $\nu = xz$ pravouhlého trojhranu a voľba stredu lineárnej perspektívy $S(s,-d,v)$, kde *v* je vzdialenosť od roviny $\pi = xy$ (tzv.základná rovina) t.j. hlavný bod $H(s,0,v)$.



Parametrické rovnice stredovo premietacej priamky SR :

$$x = s + t(x^R - s)$$
$$y = -d + t(y^R + d)$$
$$z = v + t(z^R - v)$$

Bod R_S je priesečník priamky SR a priemetne ε, ktorá má rovnicu $y = 0$. Hodnotu parametra t vypočítame: $0 = -d + t(y^R + d)$ t.j. $t = \dfrac{d}{y^R + d}$ a súradnice bodu R_S v sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$:

$$x_1 = \frac{d \cdot x^R + s.y^R}{d + y^R} \tag{8}$$

$$x_2 = \frac{v.y^R + d \cdot z^R}{d + y^R} \tag{9}$$

$$x_3 = \frac{d}{d + y^R} \tag{10}$$

V súradnicovej sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ priemetne ε sú to vyjadrenia (8) a (9).

Pri lineárnej perspektíve nás zaujímajú priemety bodov, ktoré patria zornému kruhu v priemetni ε so stredom v hlavnom bode H a polomerom $r = d.tg\dfrac{\varphi}{2}$. Analytické vyjadrenie tejto oblasti: $(x_1 - s)^2 + (x_2 - v)^2 - r^2 \le 0$. Teda vo výslednej konštrukcii zobrazujeme v lineárnej perspektíve priemety bodov, ktoré patria danej oblasti t.j. ich súradnice (8) a (9) vyhovujú uvedenej nerovnici.

Literatúra:

Macková, Zaťková: Riešenie základných úloh z deskriptívnej geometrie pomocou počítača, SVŠT Bratislava,1985

Žára, Beneš,Sochor,Felkel: Moderní počítačová grafika, Computer Press, Brno 2004