

## II. ZÁKLADNÉ PRIESTOROVÉ ÚTVARY, PLOCHY A TELESÁ

### Definícia II.-2

- a) Rovina  $\alpha$  **leží medzi** bodmi  $A, B$  - ak bod roviny  $\alpha$  leží medzi bodmi  $A, B$ . V opačnom prípade rovina  $\alpha$  **neleží medzi**  $A, B$
- b) **Polpriestor**: Nech  $\alpha$  je rovina,  $A$  bod, ktorý neleží v rovine  $\alpha$  - množina bodov  $M$  priestoru, pre ktoré platí: rovina  $\alpha$  neleží medzi bodmi  $A, M$
- c) **Vnútorne body** – body polpriestoru  $\alpha A$  nepatriace rovine  $\alpha$
- d) **Vnútro polpriestoru** – množina všetkých vnútorných bodov
- e) **Polpriestor opačný** k polpriestoru  $\alpha A$ : množina bodov, ktorá je doplnkom otvoreného polpriestoru.

- Vlastnosti: - polpriestor  $\alpha A$  je konvexný
- každá rovina  $\alpha$  rozdeľuje priestor na dve konvexné oblasti
  - dve rôznobežné roviny rozdeľujú priestor na štyri konvexné oblasti
  - tri roviny, ktoré majú spoločný práve jeden bod, rozdeľujú priestor na 8 konvexných oblastí

### Definícia II.-1

**Klin** – dvojica polrovín, ktoré majú spoločnú hranicu a neincidujú s tou istou rovinou

### Súvisiace pojmy

- **hrana klinu** – spoločná hranica polrovín
- **strany klinu** – polroviny
- **uhol klinu** – uhol, ktorého ramená sú prienikom roviny kolmej na hranu klinu s jeho stranami

Vlastnosť: - klin rozdeľuje priestor na dve oblasti, z ktorých jedna je konvexná a druhá nekonvexná

### Definícia II. 0

**Trojhran** - zjednotenie troch nekolineárnych polpriamok  $a, b, c$  so spoločným začiatkom  $O$  a vnútra každého z troch konvexných uhlov  $\angle ab, \angle ac, \angle bc$

### Súvisiace pojmy

- **vrchol trojhranu** – bod  $O$
- **hrany trojhranu** – polpriamky  $a, b, c$
- **strany trojhranu** – konvexné uhly  $\angle ab, \angle ac, \angle bc$
- **stena trojhranu** – strana trojhranu s jeho vnútrom
- **uhly trojhranu** – uhly klinov, v ktorých ležia dvojice stien

## ***Hranolová plocha Hranolový priestor Hranol***

### Definícia II.1

Nech  $P_n$  je ľubovoľný  $n$ -uholník v rovine  $\alpha$  a  $l$  je priamka rôznobežná s rovinou  $\alpha$ .

**Hranolová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a patria do osnovy priamky  $l$

**Hranolový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro a patria do osnovy priamky  $l$

### Súvisiace pojmy

- **určujúci  $n$ -uholník plochy** -  $n$ -uholník  $P_n$
- **osnovová priamka** – priamka  $l$  a každá rovnobežka s priamkou  $l$
- **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou  $l$
- **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho  $n$ -uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho  $n$ -uholníka
- **stýčná rovina plochy** – osnovová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy

$P_n$  je **konvexný**  $n$ -uholník : **konvexný hranolový priestor**  
**konvexná hranolová plocha**

Vlastnosť: - konvexná hranolová plocha rozdeľuje priestor na dve oblasti konvexnú a nekonvexnú

### Súvisiace pojmy

- **vnútorný bod hranolovej plochy/priestoru** – bod z konvexnej oblasti
- **vonkajší bod hranolovej plochy/priestoru** – zvyšné body priestoru nepatriace ploche
- **vnútro hranolovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov

### Veta II.1

Osnovová rovina má s hranolovou plochou jednu z nasledujúcich polôh:

- a) nemá s plochou žiaden spoločný bod
- b) obsahuje práve jednu hranu plochy
- c) obsahuje stenu plochy
- d) má s plochou práve dve tvoriace priamky

### Veta II.2 Vzájomná poloha priamky s hranolovou plochou

Priamka  $a$  má s hranolovou plochou jednu z nasledujúcich polôh:

- a) priamka  $a$  je osnovová priamka:
  - a<sub>1</sub>) je tvoriaca priamka plochy
  - a<sub>2</sub>) nemá s plochou žiaden spoločný bod
- b) priamka  $a$  nie je osnovová priamka:
  - b<sub>1</sub>) nemá s plochou žiaden spoločný bod
  - b<sub>2</sub>) obsahuje bod hrany alebo úsečku v stene
  - b<sub>3</sub>) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch

Definícia II.2

**Hranol** – prienik hranolového priestoru  $H$  a priestorovej vrstvy určenej dvojicou rovnobežných rovín  $\alpha, \alpha' \neq \alpha$ , ktoré nie sú osnovovými rovinami plochy

Súvisiace pojmy

- **podstavy hranola** -  $n$ -uholníky  $H \cap \alpha, H \cap \alpha'$  ( zhodné )
- **vrcholy hranola** – vrcholy podstáv
- **bočné hrany** – časti hrán príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu
- **podstavové hrany** – strany podstáv
- **bočné steny** – časti stien príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu (rovnobežníky)
- **steny hranola**- podstavy a bočné steny
- **výška hranola** – vzdialenosť rovín podstáv

**Kolmý hranol**- bočné steny sú kolmé na rovinu podstavy

**Šikmý hranol** – hranol, ktorý nie je kolmý

**Pravidelný  $n$ - boký hranol** – kolmý hranol, určujúci  $n$ -uholník je pravidelný  $n$ -uholník

**Ravnobežnosten** – hranol, ktorého podstava je rovnobežník

**Kváder** – kolmý hranol, ktorého podstava je pravouholník

**Kocka** - pravidelný hranol, ktorého každá stena je štvorec

## ***Ihlanová plocha Ihlanový priestor Ihlan***

### Definícia II.3

Nech  $P_n$  je ľubovoľný  $n$ -uholník v rovine  $\alpha$  a  $V$  je bod neležiaci v rovine  $\alpha$ .

**Úplná ihlanová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a prechádzajú bodom  $V$

**Úplný ihlanový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro a prechádzajú bodom  $V$

**Jednoduchá ihlanová plocha** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$

**Jednoduchý ihlanový priestor** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro

### Súvisiace pojmy

- **určujúci  $n$ -uholník plochy** -  $n$ -uholník  $P_n$
- **vrchol plochy** – bod  $V$
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca vrcholom plochy
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca vrcholom plochy
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho  $n$ -uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho  $n$ -uholníka
- **styčná rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy
- **vnútorný bod ihlanovej plochy** – bod príslušného ihlanového priestoru
- **vonkajší bod ihlanovej plochy** – bod nepatriaci príslušnému ihlanovému priestoru

### Veta II.3

Vrcholová rovina má s úplnou/jednoduchou ihlanovou plochou jednu z nasledujúcich polôh:

- a) má s plochou spoločný len vrchol
- b) obsahuje práve jednu hranu alebo stenu plochy
- c) pretína plochu v dvoch tvoriacich priamkach/ polpriamkach

### Veta II.4 Vzájomná poloha priamky a úplnej/jednoduchej ihlanovej plochy

Priamka  $a$  má s ihlanovou plochou jednu z nasledujúcich polôh:

- a) priamka  $a$  je vrcholová priamka:
  - a<sub>1</sub>) je tvoriaca priamka/ polpriamka plochy
  - a<sub>2</sub>) má s plochou spoločný len vrchol plochy
- b) priamka  $a$  nie je vrcholová priamka:
  - b<sub>1</sub>) nemá s plochou žiaden spoločný bod
  - b<sub>2</sub>) obsahuje bod hrany alebo úsečku v stene
  - b<sub>3</sub>) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch

### Definícia II.4

**Ihlan** – prienik jednoduchého ihlanového priestoru  $I$  a polpriestoru  $\alpha V$

### Súvisiace pojmy

- **podstava ihlana** -  $n$ -uholník  $I \cap \alpha$  aj jeho vnútro
- **vrcholy ihlana** – vrchol  $V$  a vrcholy podstavy
- **bočné hrany ihlana** – časti hrán príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **podstavné hrany** – strany podstavy

- **bočné steny** – časti stien príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **steny ihlana**- podstava a bočné steny
- **výška ihlana**- vzdialenosť vrchola  $V$  od roviny podstavy

**Kolmý ihlan**- spojnica stredu podstavy a vrchola  $V$  je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý ihlan** – ihlan, ktorý nie je kolmý

**Pravidelný  $n$ - boký ihlan** – kolmý ihlan, určujúci  $n$ -uholník je pravidelný  $n$ -uholník

**Štvorsten** – všetky steny sú trojuholníky

**Pravidelný štvorsten** – všetky steny sú rovnostranné trojuholníky

## ***Kružnicová valcová plocha    Kruhový valcový priestor    Kruhový valec***

### Definícia II.5

Nech  $k$  je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine  $\alpha$  a  $l$  je priamka rôznobežná s rovinou  $\alpha$ .

**Kružnicová valcová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu  $k$  a patria do osnovy priamky  $l$

**Kruhový valcový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh  $k$  a patria do osnovy priamky  $l$

### Súvisiace pojmy

- **určujúca kružnica [kruh]** – kružnica [ kruh ]  $k$
- **osnovová priamka** – priamka  $l$  a každá rovnobežka s priamkou  $l$
- **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou  $l$
- **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche
- **dotyková rovina** – osnovová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku

### Veta II.5

### Veta II.6

### Definícia II.6

**Kruhový valec - Valec** – prienik kruhového valcového priestoru  $V$  a priestorovej vrstvy určenej nie osnovými rovinami  $\alpha$ ,  $\alpha' \neq \alpha$ , ktorých prienik s kruhovým valcovým priestorom sú kruhy

### Súvisiace pojmy

- **podstavy valca** - kruhy  $V \cap \alpha$ ,  $V \cap \alpha'$  ( zhodné )
- **výška valca** – vzdialenosť rovín podstáv
- **strana valca** – úsečka hranice, ktorej krajné body sú na rôznych podstavách
- **stred podstavy** – stred kruhu

**Kolmý [rotačný] valec**- spojnica stredov podstáv je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý valec** – valec, ktorý nie je kolmý

**Rovnostranný valec** – výška kolmého valca je zhodná s priemerom podstavy

## ***Kružnicová kužel'ová plocha   Kruhový kužel'ový priestor   Kruhový kužel'***

### Definícia II.7

Nech  $k$  je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine  $\alpha$  a  $V$  je bod neležiaci v rovine  $\alpha$ .

**Úplná kružnicová kužel'ová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu  $k$  a prechádzajú bodom  $V$

**Úplný kruhový kužel'ový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh  $k$  a prechádzajú bodom  $V$

**Jednoduchá kružnicová kužel'ová plocha** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú kružnicu  $k$

**Jednoduchý kruhový kužel'ový priestor** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú kruh  $k$

### Súvisiace pojmy

- **určujúca kružnica [kruh]** – kružnica [ kruh ]  $k$
- **vrchol** – bod  $V$
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca bodom  $V$
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca bodom  $V$
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **dotyková rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu tvoriacu priamku plochy

### Veta II.7

### Veta II.8

### Definícia II.8

**Kruhový kužel' - Kužel'** – prienik jednoduchého kužel'ového priestoru  $K$  a polpriestoru  $\alpha V$  s hraničnou rovinou  $\alpha$ , ktorá pretína príslušný priestor v kruhu

### Súvisiace pojmy

- **podstava kužel'a** – kruh  $K \cap \alpha$
- **výška kužel'a** - vzdialenosť vrcholu  $V$  od roviny podstavy
- **hrana kužel'a** – hranica podstavy kužel'a
- **strana kužel'a** – úsečka  $VM$ ,  $M$  – bod hrany kužel'a

**Kolmý [ rotačný ] kužel'** – spojnice stredu podstavy a vrcholu  $V$  je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý kužel'** - kužel', ktorý nie je rotačný

**Rovnostranný kužel'** – rotačný kužel', ktorého dĺžka strany je zhodná s priemerom

## ***Gul'ová plocha Gul'a***

### Definícia II.9

Nech  $S$  je bod priestoru a  $r$  je kladné číslo

**Gul'ová plocha** – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť  $v$  od bodu  $S$  je zhodná s číslom  $r$

**Gul'a** – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť  $v$  od bodu  $S$  spĺňa nerovnosť  $0 \leq v \leq r$

### Súvisiace pojmy

- **stred** – bod  $S$
- **polomer** – číslo  $r$ , dĺžka úsečky  $SA$ ,  $A$  bod gul'ovej plochy
- **priemer** – číslo  $d = 2r$
- **priemerová priamka/rovina** – incidujúca so stredom
- **hlavná kružnica** – kružnica na gul'ovej ploche, s polomerom zhodným s polomerom gul'ovej plochy
- **vedľajšie kružnice** – ostatné kružnice na gul'ovej ploche
- **dotyková rovina** – rovina, ktorá má s gul'ovou plochou spoločný práve jeden bod
- **dotykový bod** – spoločný bod gul'ovej plochy a dotykovej roviny

### Veta II.9

Rovina má s gul'ovou plochou jednu z nasledujúcich polôh:

- a) nemá s plochou žiaden spoločný bod
- b) má s plochou spoločný práve jeden bod
- c) má s plochou spoločnú kružnicu

### Veta II.10 Vzájomná poloha priamky a gul'ovej plochy

Priamka má s gul'ovou plochou jednu z nasledujúcich polôh

- a) nemá s plochou žiaden spoločný bod
- b) má s plochou práve jeden spoločný bod
- c) má s plochou spoločné dva rôzne body



## ***Mnohosteny***

### Definícia II.10

**Mnohostenová plocha** - zjednotenie  $M$  konečného počtu mnohouholníkov  $M_i$  v  $E_3$ , ktoré spĺňa podmienky

- prienik ľubovoľných dvoch mnohouholníkov je buď prázdna množina, spoločný vrchol alebo spoločná strana daných mnohouholníkov
- každá strana ľubovoľného mnohouholníka je stranou nanajvýš ešte jedného mnohouholníka z  $M$
- existuje lomená čiara  $A_1 \dots A_n$ , ktorej začiatok  $A_1$  a koniec  $A_n$  sú dva ľubovoľne zvolené vrcholy dvoch mnohouholníkov z  $M$  a každá jej strana  $A_i A_j$  je stranou niektorého mnohouholníka z  $M$
- žiadne dva mnohouholníky s neprázdny prienikom neležia v jednej rovine

Súvisiace pojmy:

- **vrcholy mnohostenovej plochy** – vrcholy mnohouholníkov
- **hrany mnohostenovej plochy** – strany mnohouholníkov
- **steny mnohostenovej plochy** – mnohouholníky

### Definícia II.11

**Uzavretá mnohostenová plocha** – každá hrana mnohostenovej plochy je prienikom práve dvoch jej stien ( plocha delí priestor na dve oblasti – vonkajšia, vnútorná )

### Definícia II.12

**Jednoduchá mnohostenová plocha** – hrany vychádzajúce z ľubovoľného vrcholu plochy možno usporiadať do postupnosti tak, že po sebe nasledujúce hrany sú stranami jednej steny

### Definícia II.13

**Mnohosten** – jednoduchá uzavretá mnohostenová plocha

### Definícia II.14

**Konvexný mnohosten** – mnohosten, ktorý leží v jednom polpriestore určenom hraničnou rovinou incidujúcou so stenou mnohostena

### Definícia II.15

**Pravidelný mnohosten** – všetky steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky

Existuje päť pravidelných mnohostenov **PLATÓNOVSKÉ TELESÁ**

- **štvorsten – tetraeder**
- **kocka – hexaeder**
- **osemsten – oktaeder**
- **dvanásťsten – dodekaeder**
- **dvadsaťsten – ikosaeder**

### Definícia II.16

**Polopravidelný mnohosten** – steny sú dvoch typov pravidelných mnohouholníkov

## **ARCHIMEDOVSKE TELESÁ**

- **otupený tetraeder**
- **otupený hexaeder**
- **otupený oktaeder**
- **otupený dodekaeder**

- ❑ otupený ikosaeder
- ❑ pravidelný  $n$ -boký hranol
- ❑ rombokubooktaeder
- ❑ kubooktaeder
- ❑ romboikosododekaeder
- ❑ ikosododekaeder

Veta II.11 Eulerova veta

Nech  $V$ ,  $H$ ,  $S$  sú počty vrcholov, hrán a stien konvexného mnohostena  $M$ . Potom platí  
 **$V + S = H + 2$**

Definícia II.17

**Eulerove mnohosteny** – konvexné mnohosteny, pre ktoré platí Eulerova veta.