2. GEOMETRICKÉ TRANSFORMÁCIE a TRIEDY

SÚRADNICE BODU

Základným útvarom geometrie je bod a preto je dôležité opísať tento geometrický útvar pomocou čísel.

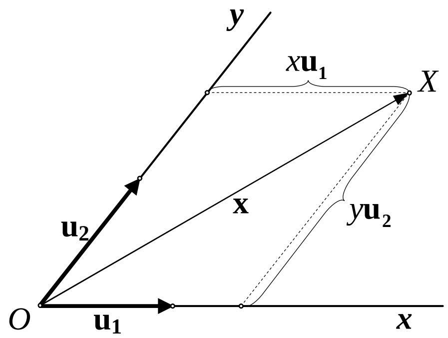
Najskôr sa budeme zaoberať rovinnou geometriou a teda budeme hovoriť o rovinnej súradnicovej sústave.

Súradnice bodu v rovine

Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice

Zvolíme v rovine E^2 bod O a vo vektorovom priestore V(E^2) bázu $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Vytvoríme trojicu $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, ktorú nazveme ***afinnou súradnicovou sústavou***. Pomocou tejto trojice priradíme každému bodu X roviny E^2 jeho polohový vektor

$$\mathbf{x} = OX = X - O = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \quad (1)$$



Čísla x, y určené podmienkou (1) nazývame ***afinnými súradnicami bodu*** X v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov roviny na množinu usporiadaných dvojíc reálnych čísel.

Zápis (x, y) je ekvivalentný s podmienkou (1) a vyjadruje, že bod X má súradnice x, y v afinnej súradnicovej sústave.

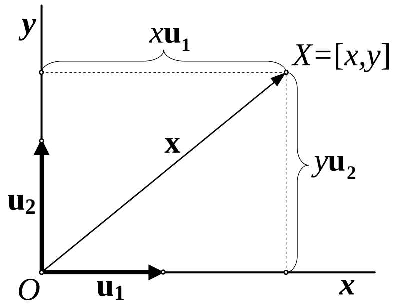
***Súradnice vektora* x** v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ rozumieme jeho súradnice v báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Teda zápis **x** = (x, y) je ekvivalentný s rovnosťou:

$$\mathbf{x} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 .$$

Priamky $x = O + \mathbf{u}_1$, $y = O + \mathbf{u}_2$ sú ***súradnicové osi*** tejto sústavy.

Karteziánska súradnicová sústava, karteziánske súradnice

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ nazveme ***karteziánskou súradnicovou sústavou*** ak vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ tvoria ortonormálnu bázu [1].



Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y)$ i ***vektora*** $\mathbf{x} = (x, y)$ sú jeho súradnice v karteziánskej súradnicovej sústave. O báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ prislúchajúcej k tejto sústave budeme predpokladať, že je pravotočivá.

<u>*Homogénne súradnice bodu*</u>

Doplníme euklidovskú rovinu E^2 o nevlastné body. Nevlastný bod je určený priamkou. Dve priamky určujú rovnaký nevlastný bod práve vtedy keď sú rovnobežné. Rozšírenú euklidovskú rovinu získame z euklidovskej roviny doplnením o nevlastné body. Body euklidovskej roviny sa nazývajú vlastné body jej rozšírenia. Bod rozšírenej euklidovskej roviny je jej vlastným alebo nevlastným bodom.

Nech $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ je afinná súradnicová sústava v euklidovskej rovine.

Usporiadanú trojicu čísel (X, Y, W), $W \neq 0$, nazveme ***homogénne (rozšírené afinné) súradnice vlastného bodu***, ak pre jeho afinné súradnice platí

$$x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}.$$

Usporiadanú trojicu čísel $(X, Y, 0)$, nazveme ***homogénne (rozšírené afinné) súradnice nevlastného bodu.***

.

Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou homogénnych súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

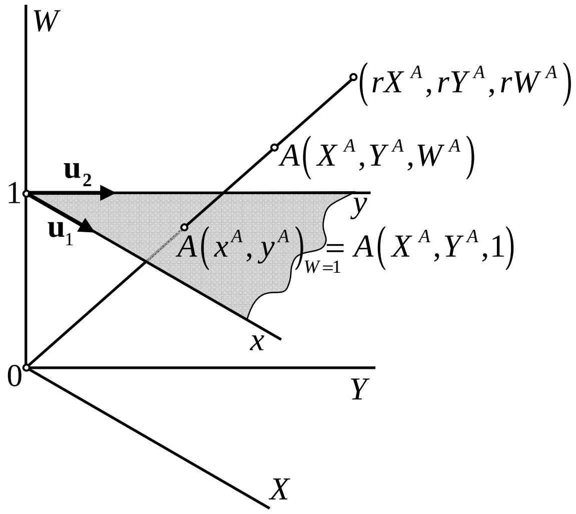
- Nech (x, y) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom $(rX, rY, rW) = r(X, Y, W)$ sú homogénne súradnice tohto bodu.

- Nech (x, y) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora **a** priamky a v rovine a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry) sú súradnice smerového vektora $r\mathbf{a}$ priamky a a $(rx, ry, 0) = (X, Y, 0)$ sú homogénne súradnice nevlastného bodu.

Vizualizácia modelu rozšírenia

Rozšírené afinné súradnice $(X, Y, 1)$ vlastného bodu sú špeciálny prípad jeho homogénnych súradníc.

Bod A v homogénnych súradniciach $r(X^A, Y^A, W^A)$, $r \neq 0$, je bodom priamky prechádzajúcej začiatkom O so smerovým vektorom (X^A, Y^A, W^A) v priestore $\langle X, Y, W \rangle$.



Afinné súradnice bodu určíme ako prienik priamky $\{X = t\,X^A,\ Y = t\,Y^A,\ W = t\,W^A\}$ s nadrovinou priestoru $\langle X, Y, W\rangle$, ktorou je rovina s rovnicou $W = 1$. Preto položíme $1 = t\,W^A$, určíme hodnotu parametra $t = \dfrac{1}{W^A}$ a afinné súradnice sú $\left(\dfrac{X^A}{W^A}, \dfrac{Y^A}{W^A}, 1\right)$.

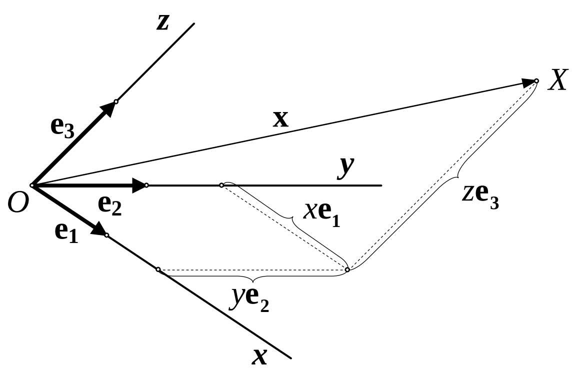
Často budeme pracovať s bodmi v trojrozmernom priestore E^3

Súradnice bodu v priestore

Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice

V priestore E^3 zvolíme bod O a vo vektorovom priestore V(E^3) bázu $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$. Štvorica $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ je ***afinnou súradnicovou sústavou v priestore***. Pomocou tejto štvorice priradíme každému bodu X priestoru E^3 jeho polohový vektor

$$\mathbf{x} = OX = X - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2)$$



Čísla x, y, z určené podmienkou (2) nazývame ***afinnými súradnicami bodu*** X v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov roviny na množinu usporiadaných trojíc reálnych čísel.

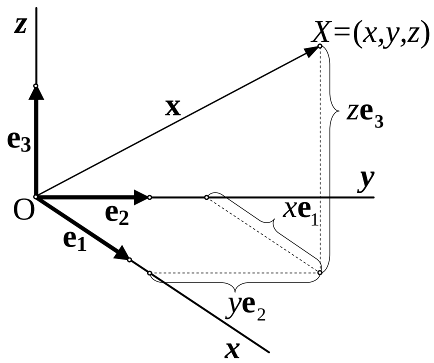
Zápis (x, y, z) je ekvivalentný s podmienkou (2) a vyjadruje, že bod X má súradnice x, y, z v afinnej súradnicovej sústave zvolenej v priestore E^3.

***Súradnice vektora* x** v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ rozumieme jeho súradnice v báze $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Zápis $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a rovnosť $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ sú ekvivalentné.

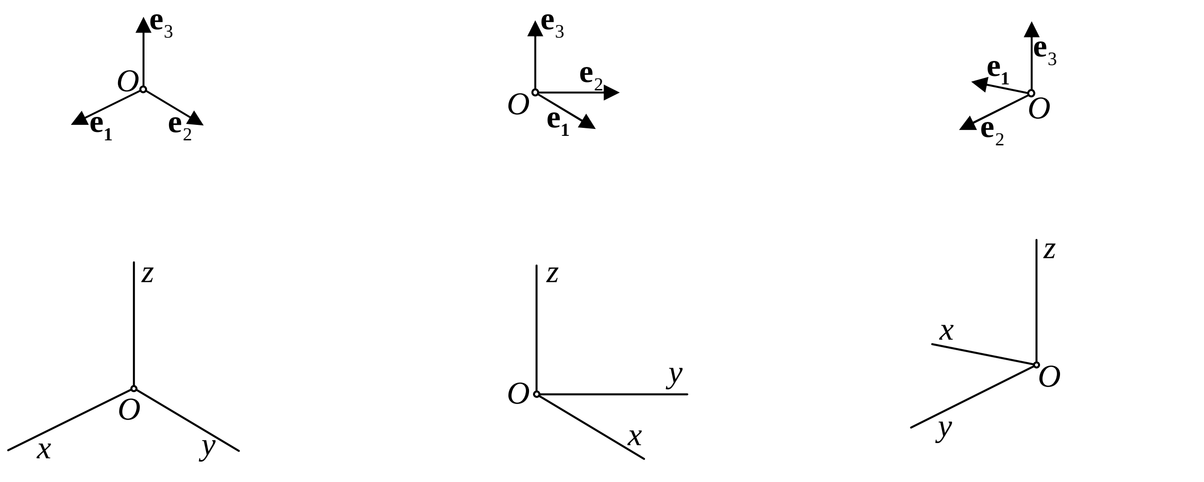
Priamky $x = O + \mathbf{e}_1$, $y = O + \mathbf{e}_2$, $z = O + \mathbf{e}_3$ sú ***súradnicové osi***.

<u>*Karteziánska súradnicová sústava, karteziánske súradnice*</u>

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ nazveme ***karteziánskou súradnicovou sústavou*** ak vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tvoria ortonormálnu bázu [1].



Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y, z)$ i ***vektora*** $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sú jeho súradnice v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Bázu $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ uvažujeme pravotočivú [1]. Grafická ilustrácia ortonormálnej bázy $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a pravouhlého trojhranu $Oxyz$ so súradnicovými osami x, y, z:



Homogénne súradnice bodu

Doplníme euklidovský priestor E^3 o nevlastné body. Nevlastný bod priamky nahradíme pojmom smer. Rovnobežné priamky majú spoločný smer – incidujú s nevlastným bodom. Rozšírený euklidovský priestor získame z euklidovského priestoru E^3 doplnením o nevlastné body. Teraz body euklidovského priestoru E^3 nazveme vlastný bod jeho rozšírenia a bod rozšíreného euklidovského priestoru je jeho vlastným alebo nevlastným bodom.

V euklidovskom priestore je daná afinná súradnicová sústava $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

Usporiadanú štvoricu čísel (X, Y, Z, W), $W \neq 0$, nazveme ***homogénne (rozšírené afinné) súradnice vlastného bodu***, ak pre jeho afinné súradnice platí

$$x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}, \quad z = \frac{Z}{W}.$$

Usporiadanú trojicu čísel ($X, Y, Z, 0$) nazveme ***homogénne (rozšírené afinné) súradnice nevlastného bodu.***

.

Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou homogénnych súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

- Nech (x, y, z) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rX, rY, rZ, rW) = $r(X, Y, Z, W)$ sú homogénne súradnice tohto bodu.

- Nech (x, y, z) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora **a** priamky v priestore a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry, rz) sú súradnice smerového vektora $r\mathbf{a}$ tejto priamky a ($rx, ry, rz, 0$) = ($X, Y, Z, 0$) sú homogénne súradnice nevlastného bodu.

Z bodov budeme vytvárať geometrické útvary v rovine alebo v priestore:

Geometrické útvary

Geometrickým útvarom je súvislá podmnožina priestoru E^2 resp. E^3, ktorú analyticky reprezentujeme bodovými funkciami n-premenných. Tieto funkcie sú spojitým zobrazením súvislej oblasti Ω.

Známe geometrické útvary v rovine E^2 resp. v priestore E^3 opisujeme vzhľadom na karteziánske súradnicové sústavy:

0-parametrický útvar:

bod (x^A, y^A) v E^2 resp. (x^A, y^A, z^A) v E^3 - *konštantná bodová funkcia*

1-parametrický útvar:

čiara $(x(u), y(u))$ v E^2 resp. $(x(u), y(u), z(u))$ v E^3 - *bodová funkcia jednej premennej* $u \in \Omega$

2-parametrický útvar:

oblasť $(x(u,v), y(u,v))$ v E^2 resp. $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ v E^3 - *bodová funkcia dvoch premenných* $u, v \in \Omega$

3-parametrický útvar:

teleso $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ v E^3 *bodová funkcia troch premenných* $u, v, w \in \Omega$

GEOMETRICKÉ TRANSFORMÁCIE

Geometrický útvar U je reprezentovaný ako množina bodov danej vlastnosti. Tento útvar U potrebujeme posunúť, otočiť, zmeniť mierku t.j. urobiť s útvarom transformácie.

Nech $E = E^n$ a $E' = E^m$ sú euklidovské priestory dimenzie n a m.
Zobrazenie L: $E \to E'$ nazveme ***afinné zobrazenie***, ak pre všetky body A, B z priestoru E a pre reálne čísla $t \in R$ platí

$$L(A + t(B - A)) = A' + t(B' - A')$$

kde $A'=L(A)$, $B'=L(B)$ sú obrazy bodov A, B.

V prípade, že priestory $E = E'$ (zobrazenie do seba), tak afinné zobrazenie L sa nazýva ***afinná transformácia***.

Afinné transformácie v rovine

Afinná transformácia L: $E^2 \to E^2$

$$L(x,y) = (ax + cy + m, bx + dy + n)$$

kde a, b, c, d, m, n sú reálne čísla (determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$).

Maticový zápis

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

$x = X/1$, $y = Y/1$, $x' = X'/1$, $y' = Y'/1$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Matica (3,3) sa nazýva ***matica geometrickej transformácie L*** a označíme ju **G**. Súradnice bodov obrazu U' geometrického útvaru U získame zo súradníc bodov vzoru vynásobením maticou **G**: $U'=U \circ \mathbf{G}$

Prehľad najčastejšie používaných afinných transformácií v rovine pre počítačovú geometriu.
Návšteva interaktívnych appletov je na : http://pg.netgraphics.sk
Časť: Transformácie v 2D.
Poznámka: Interaktívne applety dopĺňajú text, v ktorom sú použité niektoré iné označenia, ale i vysvetlenia. Táto linka je určená výlučne len pre grafickú ilustráciu príslušnej transformácie

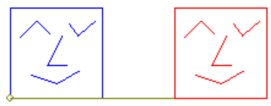
Identická transformácia

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{I}$$

Vzor U a obraz U' sú totožné

Posunutie o vektor x(m,n)

$$\mathbf{T}(m,n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & n & 1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{T}(m,n)$$

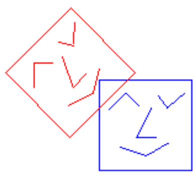


Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.3

Otočenie okolo začiatku súradnicovej sústavy o uhol φ

$\varphi>0$ pre otáčanie proti smeru hodinových ručičiek

$$\mathbf{R}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{R}(\varphi)$$

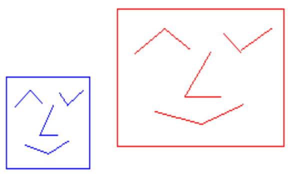


Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.4

Škálovanie vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy

sx, *sy* škálovacie faktory mierky pre súradnicové osi *x*, *y*

$$\mathbf{S}(sx,sy)=\begin{pmatrix}sx & 0 & 0\\ 0 & sy & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{S}(sx,sy)$$



Matica škálovania $\mathbf{S}(sx,sy)$ môže byť reprezentovaná aj maticou

$$\mathbf{S}(sx,sy,sw)=\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sw \end{pmatrix} \quad \text{vtedy} \quad \begin{pmatrix} X' & Y' & W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

a afinné súradnice dostaneme:

$$x' = \frac{sx}{sw} X \qquad y' = \frac{sy}{sw} Y$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.5

<u>Súmernosť vzhľadom na súradnicové osi</u>

Súradnicová os x

$$\mathbf{Z}(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(x)$$

Súradnicová os y

$$\mathbf{Z}(y)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(y)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.6

<u>Skosenie v smere súradnicovej osi, koeficient skosenia</u>

Súradnicová os x a koeficient skosenia c

$$\mathbf{E}(x,c)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(x,c)$$

Súradnicová os y a koeficient skosenia b

$$\mathbf{E}(y,b)=\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(y,b)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.7

Skladanie transformácií v rovine

V lineárnej algebre sa používa operácia skladania „$\circ$“ , v ktorej $\varphi \circ \psi$ znamená, že sa realizuje φ po ψ t.j. $A' = \varphi(\psi(A)) = \varphi \circ \psi(A)$. Vzhľadom na to, že budeme skladať aj viac transformácií $\mathbf{G}_i$, i=1,...,n, mali by sme používať zápis napr.: $A' = (\mathbf{G}_3(\mathbf{G}_2(\mathbf{G}_1(A))))$.

Z dôvodu, že analytické vyjadrenie zloženej afinnej transformácie je určené súčinom analytických vyjadrení skladaných transformácií budeme naďalej používať operáciu „potom“, ale zapíšeme $A' = A \circ \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ ..... \circ \mathbf{G}_n$, čo znamená, že na bod A najskôr aplikujeme transformáciu $\mathbf{G}_1$, potom $\mathbf{G}_2$ až $\mathbf{G}_n$. Skladanie transformácií nie je komutatívne, to značí, že záleží na poradí v akom sa transformácie vytvárajú. Väčšinou uskutočníme súčin matíc reprezentujúcich príslušnú transformáciu a na geometrický útvar aplikujeme maticu
$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ ... \circ \mathbf{G}_n$

Príklad: Nech $\mathbf{G}_1 = \mathbf{R}(\varphi)$ a $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}(m,n)$ sú dve transformácie, potom

$$\mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 = \mathbf{R}(\varphi) \circ \mathbf{T}(m,n) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

Výsledok: pre $\varphi = 3\pi/2$ a $\mathbf{T}(3,2)$ má matica $\mathbf{G}$ výslednej transformácie tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzné transformácie v rovine

K transformácii $L: E \to E'$ určíme jej inverznú transformáciu $L^{-1}: E' \to E$, pre tieto transformácie platí: $L \circ L^{-1} = \mathbf{I} = L^{-1} \circ L$, kde $\mathbf{I}$ je identická transformácia. Z algebry vieme, že transformácia L, ktorá má inverznú transformáciu L^{-1} sa nazýva regulárna transformácia .
Inverzné transformácie k uvedeným afinným transformáciam:

posunutie	$\mathbf{T}(m,n)$	inverzná transformácia	$\mathbf{T}(m,n)^{-1} = \mathbf{T}(-m,-n)$
rotácia	$\mathbf{R}(\varphi)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}(\varphi)^{-1} = \mathbf{R}(-\varphi)$
škálovanie	$\mathbf{S}(sx,sy)$	inverzná transformácia	$\mathbf{S}(sx,sy)^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{sx},\frac{1}{sy}\right)$

Príklad: Rotácia okolo bodu $A(x^A,y^A)$ o uhol φ: $\mathbf{R}((x^A,y^A), \varphi)$
Riešenie:

$$\mathbf{R}((x^A, y^A),\varphi) = \mathbf{T}(-x^A,-y^A) \circ \mathbf{R}(\varphi) \circ \mathbf{T}(x^A, y^A)$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$ kde $m = -x^A \cos\varphi + y^A \sin\varphi + x^A$, $n = -x^A \sin\varphi - y^A \cos\varphi + y^A$

Afinné transformácie v priestore

Afinná transformácia L: $E^3 \to E^3$

$$L(x, y, z) = (ax + dy + gz + l,\ bx + ey + iz + m,\ cx + fy + jz + n)$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, i, j, l, m, n$ sú reálne čísla (determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{vmatrix} \neq 0$).

Maticový zápis

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & i & j & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & i & j & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Matica (4,4) je ***maticou geometrickej transformácie L*** v priestore a označíme ju **G**. Súradnice bodov obrazu *U'* geometrického útvaru *U* získame zo súradníc bodov vzoru vynásobením maticou G:

$$U' = U \circ \mathbf{G}$$

Návšteva interaktívnych appletov je na : http://pg.netgraphics.sk
Časť: Transformácie v 3D.
Poznámka: Interaktívne applety dopĺňajú text, v ktorom sú použité niektoré iné označenia, ale i vysvetlenia (napr. v appletoch otočení je ľavotočivá súradnicová sústava). Táto linka je určená výlučne len pre grafickú ilustráciu príslušnej transformácie .

Identická transformácia

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zápis: $\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}$

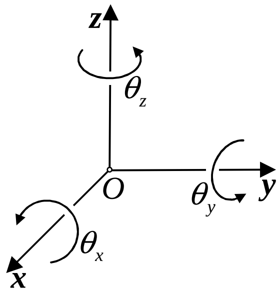
***Posunutie o vektor* x(*l*,*m*,*n*,)**

$$\mathbf{T}(l,m,n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

zápis: $\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}(l,m,n)$

Otočenie okolo súradnicových osí

Základné rotácie.
Použijeme pravotočivú karteziánsku súradnicovú sústavu, voľba uhlov otočenia je kladná.



x-otočenie okolo súradnicovej osi x o uhol $\boldsymbol{\theta_x}$

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_x(\theta_x)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.8

y-otočenie okolo súradnicovej osi y o uhol $\boldsymbol{\theta_y}$

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_y(\theta_y)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.9

z-otočenie okolo súradnicovej osi z o uhol $\boldsymbol{\theta_z}$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_z(\theta_z)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.10

Uhly $\boldsymbol{\theta_x}$, $\boldsymbol{\theta_y}$, $\boldsymbol{\theta_z}$ pri základných rotáciách sú známe ako ***Eulerove uhly***

Škálovanie vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy

sx, sy, sz škálovacie faktory mierky pre súradnicové osi x, y, z

$$\mathbf{S}(sx, sy, sz)=\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis: } \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}(sx, sy, sz)$$

Matica škálovania $\mathbf{S}(sx,sy,sz)$ môže byť reprezentovaná aj maticou

$$\mathbf{S}(sx, sy, sz, sw)=\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

Vtedy

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' & W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

a afinné súradnice bodu dostaneme:

$$x' = \frac{sx}{sw} X \qquad y' = \frac{sy}{sw} Y \qquad z' = \frac{sz}{sw} Z$$

Skladanie transformácií v priestore

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \circ \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ \ldots\ldots \circ \mathbf{G}_i$$

i určuje poradie transformácie v priestore.

Príklad: Nech $\mathbf{G}_1 = \mathbf{R}_z(\theta_z)$ a $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}(0,0,n)$ sú dve transformácie, potom

$$\mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 = \mathbf{R}_z(\theta_z) \circ \mathbf{T}(0,0,n) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: ***skrutkový pohyb*** v smere súradnicovej osi z , označenie $\mathbf{SP}_z$

Inverzné transformácie v priestore

Postup určenia inverznej transformácie $L^{-1} : E' \to E$ k danej transformácii $L : E \to E'$ v priestore je analogický ako v rovine. Preto uvedieme inverzné transformácie k týmto afinným transformáciam v priestore:

Inverzné transformácie k uvedeným afinným transformáciam:

posunutie	$\mathbf{T}(l,m,n)$	inverzná transformácia	$\mathbf{T}(l,m,n)^{-1} = \mathbf{T}(-l,-m,-n)$
rotácia	$\mathbf{R}_x(\theta_x)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_x(\theta_x)^{-1} = \mathbf{R}_x(-\theta_x)$
	$\mathbf{R}_y(\theta_y)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_y(\theta_y)^{-1} = \mathbf{R}_y(-\theta_y)$
	$\mathbf{R}_z(\theta_z)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_z(\theta_z)^{-1} = \mathbf{R}_z(-\theta_z)$
škálovanie	$\mathbf{S}(sx,sy,sz)$	inverzná transformácia	$\mathbf{S}(sx,sy,sz)^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{sx},\frac{1}{sy},\frac{1}{sz}\right)$

TRIEDY GEOMETRICKÝCH TRANSFORMÁCIÍ

Vytvoriť predstavu o pohybe útvaru U o jeho „premiestňovaní“ sa v rovine či v priestore môžeme zabezpečiť tak, že nahradíme geometrickú transformáciu **G** množinou geometrických transformácií $G_1 \circ G_2 \circ .... \circ G_i$ toho istého typu a nazveme ju ***trieda geometrických transformácií***.

Triedy geometrických transformácií v rovine

Trieda geometrických transformácií v rovine je množinou transformácií toho istého typu reprezentovaná maticou

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & 0 \\ c(t) & d(t) & 0 \\ m(t) & n(t) & s(t) \end{pmatrix}$$

ktorej prvky sú reálne funkcie jednej premennej t, všetky definované, spojité a aspoň raz diferencovateľné na intervale $I = \langle 0,1 \rangle$.

Trieda translácií

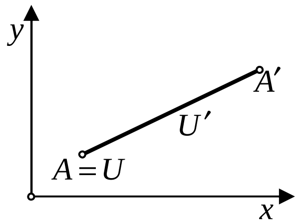
$$\mathbf{T}\left(t.m, t.n\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t.m & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Príklady:

1.Nech geometrický útvar U je bod A so súradnicami (x^A, y^A), potom

$$(x^A,\ y^A,\ 1)\mathbf{T}(t.m\ , t.n) = (x^A + t.m\ ,\ y^A + t.n\ , 1)$$

je úsečka U' so začiatočným bodom $A(x^A,\ y^A)$ a koncovým bodom $A'(x^A + m, y^A + n)$

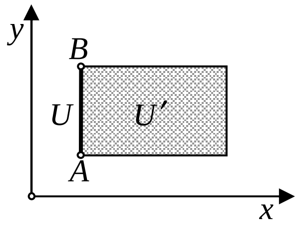


2.Nech geometrický útvar U je úsečka

$$AB = \left\{ x(u) = x^A + u(x^B - x^A), y(u) = y^A + u(y^B - y^A), u \in \langle 0,1 \rangle \right\}$$ potom

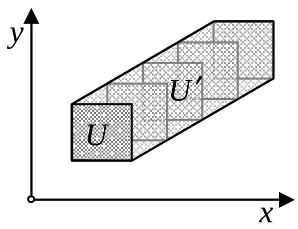
$$(x(u), y(u), 1)\mathbf{T}(t.m, t.n) = (x(u,t), y(u,t), 1) \qquad u,t \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

a obraz U' je oblasť v rovine t.j. štvoruholník a jeho vnútro.



3. Nech geometrický útvar U je oblasť - štvoruholník a jeho vnútro
t.j. $U = (x(u,v), y(u,v)), u, v \in \Omega$
potom

$$(x(u,v), y(u,v), 1)\mathbf{T}(t.m, t.n) = (x(u,v,t), y(u,v,t), 1) \qquad u,v,t \in \Omega \times \langle 0,1 \rangle$$



Hovoríme, že 3-parametrický útvar vyjadruje zmenu polohy 2-parametrického útvaru v čase t a to je práve prvok jednoduchej animácie.

Trieda rotácií okolo začiatku súradnicovej sústavy

$$\mathbf{R}(t.\varphi) = \begin{pmatrix} \cos t.\varphi & \sin t.\varphi & 0 \\ -\sin t.\varphi & \cos t.\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Trieda škálovaní

$$\mathbf{S}(t.s_x, t.s_y) = \begin{pmatrix} t.s_x & 0 & 0 \\ 0 & t.s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Triedy geometrických transformácií v priestore

Trieda geometrických transformácií v priestore je množinou transformácií toho istého typu. Analyticky je určená maticou

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) & 0 \\ d(t) & e(t) & f(t) & 0 \\ g(t) & i(t) & j(t) & 0 \\ l(t) & m(t) & n(t) & s(t) \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Prvky matice sú reálne funkcie jednej premennej t, všetky definované, spojité a aspoň raz diferencovateľné na intervale $I = \langle 0,1 \rangle$.

Trieda translácií

$$\mathbf{T}\left(t.l, t.m, t.n\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t.l & t.m & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Trieda rotácií

xt-otočenie okolo súradnicovej osi x o uhol t.θ_x

$$\mathbf{R}_x\left(t.\theta_x\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t.\theta_x & \sin t.\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin t.\theta_x & \cos t.\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

yt-otočenie okolo súradnicovej osi y o uhol t.θ_y

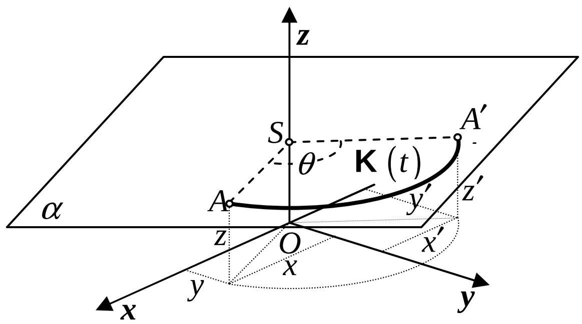
$$\mathbf{R}_y\left(t.\theta_y\right) = \begin{pmatrix} \cos t.\theta_y & 0 & -\sin t.\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin t.\theta_y & 0 & \cos t.\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

zt-otočenie okolo súradnicovej osi z o uhol t.θ_z

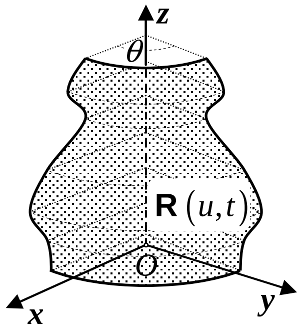
$$\mathbf{R}_z\left(t.\theta_z\right) = \begin{pmatrix} \cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Príklad:

1.Nech geometrický útvar U je bod A. Výsledný útvar je čiara $\mathbf{K}(t)$



2.Nech geometrický útvar je čiara $\mathbf{K}(t)$. Výsledný útvar je plocha $\mathbf{R}(u,t)$



Trieda skrutkového pohybu

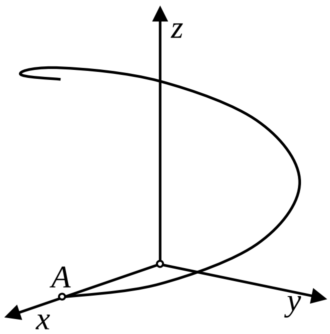
Skrutkový pohyb v smere súradnicovej osi z - $\mathbf{SP}_z$. Trieda k tejto geometrickej transformácii, je reprezentovaný maticou

$$\mathbf{SP}_z\left(t.\theta_z\right)=\begin{pmatrix} \cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t\in\left\langle 0,1\right\rangle$$

Príklad:
Nech geometrický útvar U je bod A so súradnicami (x^A, y^A, z^A), potom

$$(x^A, y^A, z^A,\ 1)\mathbf{SP}_z(t.\theta_z)=(x^A\cos t.\theta_z - y^A\sin t.\theta_z, x^A\sin t.\theta_z + y^A\cos t.\theta_z, z^A + t.n\ ,\ 1)$$

$$t\in\left\langle 0,1\right\rangle, \theta_z = 2\pi$$



Výsledok je priestorová krivka ***skrutkovica***.