2. GEOMETRICKÉ TRANSFORMÁCIE A ICH TRIEDY

Geometrický útvar U je reprezentovaný ako množina bodov danej vlastnosti. Tento útvar U potrebujeme posunúť, otočiť, zmeniť mierku t.j. urobiť s útvarom transformácie.

Základné informácie o afinných zobrazeniach a transformáciach v priestoroch dimenzie n, E^n – n-rozmerný euklidovský priestor:

Nech $E = E^n$ a $E' = E^m$ sú euklidovské priestory dimenzie n a m.
Zobrazenie L: $E \rightarrow E'$ nazveme ***afinné zobrazenie***, ak pre všetky body A, B z priestoru E a pre reálne čísla $t \in R$ platí

$$L(A + t(B - A)) = A' + t(B' - A')$$

kde $A'=L(A)$, $B'=L(B)$ sú obrazy bodov A, B.

V prípade, že priestory $E = E'$ (zobrazenie do seba), tak afinné zobrazenie L sa nazýva ***afinná transformácia***. ([1],[2]).

Afinné transformácie v rovine

Afinnú transformáciu L: $E^2 \rightarrow E^2$ analyticky zapíšeme

$$L(x,y) = (ax + cy + m,\ bx + dy + n)$$

kde a, b, c, d, m, n sú reálne čísla (determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$). Vzhľadom na ďalšie operácie (skladanie transformácií, inverzné transformácie) využijeme maticový zápis

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

kde bod euklidovskej roviny (x, y) je reprezentovaný homogénnymi súradnicami $(X, Y, 1)$. Vieme, že afinné súradnice bodu (x, y) získame z homogénnych súradníc $(X, Y, 1)$ predpisom: $x = X/1$, $y = Y/1$, $x' = X'/1$, $y' = Y'/1$, tak môžeme zapisovať

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

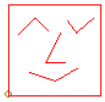
Matica (3,3) sa nazýva ***matica geometrickej transformácie L*** a označíme ju **G**. Súradnice bodov obrazu U' geometrického útvaru U získame zo súradníc bodov vzoru vynásobením maticou **G**: $U' = U \circ \mathbf{G}$

Prehľad najčastejšie používaných afinných transformácií v rovine pre počítačovú geometriu.

V snahe minimalizovať označenia budeme pre transformáciu i maticu transformácie používať spoločné označenie pričom každá transformácia bude mať priradené označenie doplnené o charakteristické prvky. Pri každom zobrazení uvedieme maticu geometrickej transformácie a pre ilustráciu každej transformácie použijeme vzor U vykreslený modrou farbou.

Vzor U je vytvorený z úsečiek t.j. poznáme súradnice krajných bodov :

Obraz $U' = U \circ \mathbf{G}$ po transformácii je vykreslený ružovou farbou :



Návšteva interaktívnych appletov je na : http://pg.netgraphics.sk
Časť: Transformácie v 2D.
Poznámka: Interaktívne applety dopĺňajú text, v ktorom sú použité niektoré iné označenia, ale i vysvetlenia. Táto linka je určená výlučne len pre grafickú ilustráciu príslušnej transformácie

Identická transformácia

Je určená jednotkovou maticou:

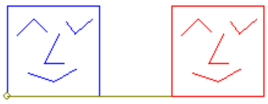
$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{I}$$

Vzor U a obraz U' sú totožné

Posunutie o vektor x(m,n)

Matica posunutia:

$$\mathbf{T}(m,n)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\m&n&1\end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\mathbf{T}(m,n)$$



Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.3

Príklad: Nech (1, 1), (3,1), (2,2), (1.5,3) sú karteziánske súradnice vrcholov štvoruholníka a (2,1) vektor posunutia. Vypočítajte karteziánske súradnice obrazov.
Riešenie: zápis v homogénnych súradniciach

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&1&1\\2&2&1\\1.5&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&2&1\\4&3&1\\3.5&4&1\end{pmatrix}$$

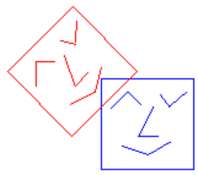
Výsledok: Karteziánske súradnice obrazov vrcholov štvoruholníka (3,2), (5,2), (4,3), (3.5,4).

Otočenie okolo začiatku súradnicovej sústavy o uhol φ

$\varphi > 0$ pre otáčanie proti smeru hodinových ručičiek

Matica otáčania:

$$\mathbf{R}(\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}(\varphi)$$



Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.4

Príklad: Nech $\varphi = 60°$. Zapíšme prvky matice $\mathbf{R}(\varphi)$

Riešenie: cos60°=0.5, sin60°=0.866

Výsledok:

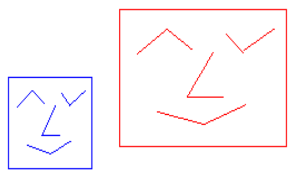
$$\mathbf{R}(60°)=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Škálovanie vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy

sx, *sy* škálovacie faktory mierky pre súradnicové osi *x*, *y*

Matica škálovania

$$\mathbf{S}(sx, sy)=\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}(sx, sy)$$



Matica škálovania $\mathbf{S}(sx,sy)$ môže byť reprezentovaná aj maticou

$$\mathbf{S}(sx, sy, sw)=\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sw \end{pmatrix} \quad \text{vtedy} \quad \begin{pmatrix} X' & Y' & W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

a afinné súradnice dostaneme:

$$x' = \frac{sx}{sw} X \qquad\qquad y' = \frac{sy}{sw} Y$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.5

Príklad: Nech $sx = 4$ a $sy = 2$ a štvorec má vrcholy (1,1), (2,1), (2,2), (1,2). Vypočítajte karteziánske súradnice obrazov vrcholov.

Riešenie: zápis v homogénnych súradniciach

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Karteziánske súradnice obrazov vrcholov sú (4,2), (8,2), (8,4), (4,4).

Súmernosť vzhľadom na súradnicové osi

Súradnicová os x. Matica súmernosti vzhľadom na os x

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(x)$$

Súradnicová os y. Matica súmernosti vzhľadom na os y

$$\mathbf{Z}(y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(y)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.6

Skosenie v smere súradnicovej osi, koeficient skosenia

Súradnicová os x a koeficient skosenia c. Matica skosenia

$$\mathbf{E}(x,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(x,c)$$

Súradnicová os y a koeficient skosenia b. Matica skosenia

$$\mathbf{E}(y,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(y,b)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.7

Príklad: Trojuholník má vrcholy (1,1), (3,1), (2,2). Vypočítajte karteziánske súradnice obrazov vrcholov pre skosenie v smere súradnicovej osi x s koeficientom skosenia $c = 1.5$

Riešenie: zápis v homogénnych súradniciach

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 1 \\ 4.5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Karteziánske súradnice obrazov vrcholov sú (2.5,1), (4.5,1), (5,2).

Skladanie transformácií v rovine

Častokrát potrebujeme použiť niekoľko transformácií po sebe a nie vždy chceme vyjadriť zmenu polohy útvaru vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy alebo vzhľadom na niektorú súradnicovú os, tak ako sme to vyjadrovali doteraz. Teda potrebujeme tieto transformácie skladať.

V lineárnej algebre sa používa operácia skladania „$\circ$“ , v ktorej $\varphi \circ \psi$ znamená, že sa realizuje φ po ψ t.j. $A' = \varphi(\psi(A)) = \varphi \circ \psi(A)$. Vzhľadom na to, že budeme skladať aj viac transformácií $\mathbf{G}_i$, i=1,...,n, mali by sme používať zápis napr.: $A' = (\mathbf{G}_3(\mathbf{G}_2(\mathbf{G}_1(A))))$.

Z dôvodu, že analytické vyjadrenie zloženej afinnej transformácie je určené súčinom analytických vyjadrení skladaných transformácií budeme naďalej používať operáciu „potom“, ale zapíšeme $A' = A \circ \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ ..... \circ \mathbf{G}_n$, čo znamená, že na bod A najskôr aplikujeme transformáciu $\mathbf{G}_1$, potom $\mathbf{G}_2$ až $\mathbf{G}_n$. Skladanie transformácií nie je komutatívne, to značí, že záleží na poradí v akom sa transformácie vytvárajú. Väčšinou uskutočníme súčin matíc reprezentujúcich príslušnú transformáciu a na geometrický útvar aplikujeme maticu
$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ ... \circ \mathbf{G}_n$

Príklad: Nech $\mathbf{G}_1$ = $\mathbf{R}(\varphi)$ a $\mathbf{G}_2$ = $\mathbf{T}(m,n)$ sú dve transformácie, potom

$$\mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 = \mathbf{R}(\varphi) \circ \mathbf{T}(m,n) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

Výsledok: pre φ =3π/2 a $\mathbf{T}$(3,2) má matica $\mathbf{G}$ výslednej transformácie tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzné transformácie v rovine

K transformácii $L: E \rightarrow E'$ určíme jej inverznú transformáciu $L^{-1}: E' \rightarrow E$, pre tieto transformácie platí: $L \circ L^{-1} = \mathbf{I} = L^{-1} \circ L$, kde $\mathbf{I}$ je identická transformácia. Z algebry vieme, že transformácia L, ktorá má inverznú transformáciu L^{-1} sa nazýva regulárna transformácia .
Inverzné transformácie k uvedeným afinným transformáciam:

posunutie	$\mathbf{T}(m,n)$	inverzná transformácia	$\mathbf{T}(m,n)^{-1} = \mathbf{T}(-m,-n)$
otočenie	$\mathbf{R}(\varphi)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}(\varphi)^{-1} = \mathbf{R}(-\varphi)$
škálovanie	$\mathbf{S}(sx,sy)$	inverzná transformácia	$\mathbf{S}(sx,sy)^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{sx}, \frac{1}{sy}\right)$

Príklad: Otočenie okolo bodu $A(x^A,y^A)$ o uhol φ: $\mathbf{R}((x^A,y^A), \varphi)$
Riešenie:

$$\mathbf{R}((x^A, y^A), \varphi) = \mathbf{T}(-x^A, -y^A) \circ \mathbf{R}(\varphi) \circ \mathbf{T}(x^A, y^A)$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$ kde $m = -x^A \cos\varphi + y^A \sin\varphi + x^A$, $n = -x^A \sin\varphi - y^A \cos\varphi + y^A$

Afinné transformácie v priestore

Afinnú transformáciu L: $E^3 \to E^3$ analyticky zapisujeme v tvare

$$L(x, y, z) = (ax + dy + gz + l,\ bx + ey + iz + m,\ cx + fy + jz + n)$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, i, j, l, m, n$ sú reálne čísla (determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{vmatrix} \neq 0$. Vzhľadom na ďalšie operácie (skladanie transformácií, inverzné transformácie) využijeme maticový zápis

$$\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & i & j & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

kde bod euklidovského priestoru (x, y, z) je reprezentovaný homogénnymi súradnicami (X, Y, Z, 1). Analogicky ako pri afinných transformáciach v rovine budeme zapisovať:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & i & j & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Matica (4,4) je ***maticou geometrickej transformácie L*** v priestore a označíme ju **G**. Súradnice bodov obrazu *U'* geometrického útvaru *U* získame zo súradníc bodov vzoru vynásobením maticou G:

$$U' = U \circ \mathbf{G}$$

Z geometrických transformácií v priestore vyberieme tie transformácie, s ktorými budeme neskôr pracovať resp. ich vyžadujú niektoré grafické systémy.
Pri každom zobrazení uvedieme maticu geometrickej transformácie, ktorú označíme v súlade s používanými názvami.

Návšteva interaktívnych appletov je na : http://pg.netgraphics.sk
Časť: Transformácie v 3D.
Poznámka: Interaktívne applety dopĺňajú text, v ktorom sú použité niektoré iné označenia, ale i vysvetlenia (napr. v appletoch otočení je ľavotočivá súradnicová sústava). Táto linka je určená výlučne len pre grafickú ilustráciu príslušnej transformácie .

Identická transformácia

Je určená jednotkovou maticou:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \qquad \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}$$

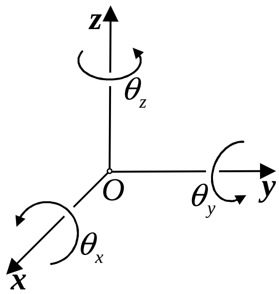
***Posunutie o vektor* x(*l,m,n,*)**

Matica posunutia:

$$\mathbf{T}(l,m,n)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\l&m&n&1\end{pmatrix}\qquad \text{zápis:}\qquad \begin{pmatrix}x'&y'&z'&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z&1\end{pmatrix}\mathbf{T}(l,m,n)$$

Otočenie okolo súradnicových osí

Otočenie v priestore popisujeme okolo každej zo súradnicových osí *x*, *y*, *z*, tieto otočenia sa nazývajú ***základné rotácie***. Budeme používať pravotočivú karteziánsku súradnicovú sústavu a voľba uhlov otočenia je kladná.



x-otočenie okolo súradnicovej osi x o uhol $\boldsymbol{\theta_x}$

Matica *x*-otočenia:

$$\mathbf{R}_x(\theta_x)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta_x&\sin\theta_x&0\\0&-\sin\theta_x&\cos\theta_x&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{zápis:}\begin{pmatrix}x'&y'&z'&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z&1\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\theta_x)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.8

y-otočenie okolo súradnicovej osi y o uhol $\boldsymbol{\theta_y}$

Matica *y*-otočenia:

$$\mathbf{R}_y(\theta_y)=\begin{pmatrix}\cos\theta_y&0&-\sin\theta_y&0\\0&1&0&0\\\sin\theta_y&0&\cos\theta_y&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{zápis:}\begin{pmatrix}x'&y'&z'&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z&1\end{pmatrix}\mathbf{R}_y(\theta_y)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.9

z-otočenie okolo súradnicovej osi z o uhol θ_z
Matica *z*-otočenia:

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_z(\theta_z)$$

Ilustrácia: http://pg.netgraphics.sk : applet 7.10

Uhly θ_x, θ_y, θ_z pri základných rotáciách sú známe ako ***Eulerove uhly***

Škálovanie vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy

sx, *sy*, *sz* škálovacie faktory mierky pre súradnicové osi *x*, *y*, *z*
Matica škálovania:

$$\mathbf{S}(sx, sy, sz) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}(sx, sy, sz)$$

Matica škálovania $\mathbf{S}(sx,sy,sz)$ môže byť reprezentovaná aj maticou

$$\mathbf{S}(sx, sy, sz, sw) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

Vtedy

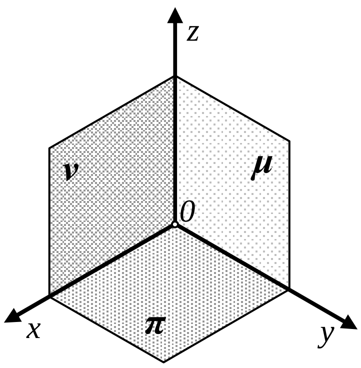
$$\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' & W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sw \end{pmatrix}$$

a afinné súradnice bodu dostaneme:

$$x' = \frac{sx}{sw} X \qquad y' = \frac{sy}{sw} Y \qquad z' = \frac{sz}{sw} Z$$

Skosenie v smere súradnicovej roviny, koeficienty skosenia

Súradnicové osi *x*, *y*, *z* určujú po dvojiciach súradnicové roviny, ktoré sú označené $\pi = xy, \quad \nu = xz$ a $\mu = yz$.



π-skosenie v smere súradnicovej roviny π, koeficienty skosenia g, i

Súradnicová rovina π má rovnicu $z = 0$ a koeficienty skosenia sú g, i

Matica π-skosenia:

$$\mathbf{E}(\pi,g,i)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(\pi, g, i)$$

ν-skosenie v smere súradnicovej roviny ν, koeficienty skosenia d, f

Súradnicová rovina ν má rovnicu $y = 0$ a koeficienty skosenia sú d, f

Matica ν-skosenia:

$$\mathbf{E}(\nu,d,f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(\nu, d, f)$$

μ-skosenie v smere súradnicovej roviny μ, koeficienty skosenia b, c

Súradnicová rovina μ má rovnicu $x = 0$ a koeficienty skosenia sú b, c

Matica μ-skosenia:

$$\mathbf{E}(\mu,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{zápis:} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(\mu, b, c)$$

Skladanie transformácií v priestore

K skladaniu afinných transformácií v priestore použijeme súčin analytických vyjadrení postupne pridávaných transformácií. Skladanie transformácií nie je komutatívne a teda záleží na poradí v akom sa transformácie pridávajú. Dodržíme nasledovný postup pripisovania transformácií v priestore:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \circ \mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 \circ \ldots\ldots \circ \mathbf{G}_i$$

kde i určuje poradie transformácie v priestore.

Príklad: Nech $\mathbf{G}_1 = \mathbf{R}_z(\theta_z)$ a $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}(0,0,n)$ sú dve transformácie, potom

$$\mathbf{G}_1 \circ \mathbf{G}_2 = \mathbf{R}_z(\theta_z) \circ \mathbf{T}(0,0,n) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: matica výslednej transformácie je známa ako ***skrutkový pohyb*** v smere súradnicovej osi z a označíme $\mathbf{SP}_z$

Inverzné transformácie v priestore

Postup určenia inverznej transformácie $L^{-1}: E' \to E$ k danej transformácii $L: E \to E'$ v priestore je analogický ako v rovine. Preto uvedieme inverzné transformácie k týmto afinným transformáciam v priestore:

Inverzné transformácie k uvedeným afinným transformáciam:

posunutie	$\mathbf{T}(l,m,n)$	inverzná transformácia	$\mathbf{T}(l,m,n)^{-1} = \mathbf{T}(-l,-m,-n)$
otočenie	$\mathbf{R}_x(\theta_x)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_x(\theta_x)^{-1} = \mathbf{R}_x(-\theta_x)$
	$\mathbf{R}_y(\theta_y)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_y(\theta_y)^{-1} = \mathbf{R}_y(-\theta_y)$
	$\mathbf{R}_z(\theta_z)$	inverzná transformácia	$\mathbf{R}_z(\theta_z)^{-1} = \mathbf{R}_z(-\theta_z)$
škálovanie	$\mathbf{S}(sx,sy,sz)$	inverzná transformácia	$\mathbf{S}(sx,sy,sz)^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{sx},\frac{1}{sy},\frac{1}{sz}\right)$

TRIEDY GEOMETRICKÝCH TRANSFORMÁCIÍ

Doteraz sme na geometrické útvary U vytvorené z úsečiek aplikovali geometrickú transformáciu. Táto transformácia reprezentovaná maticou **G** bola výsledkom jednej alebo viac po sebe nasledujúcich geometrických transformácií. Teda získali sme obraz U' útvaru U.

Vytvoriť predstavu o pohybe útvaru U o jeho „premiestňovaní“ sa v rovine či v priestore môžeme zabezpečiť tak, že nahradíme geometrickú transformáciu **G** množinou geometrických transformácií $G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i$ toho istého typu a nazveme ju ***trieda geometrických transformácií***. Môžeme povedať, že získaný grafický výsledok vyvoláva ***jednoduchú animáciu***. Podrobnejší opis vybraných tried geometrických transformácií urobíme opäť pre rovinu a priestor.

Triedy geometrických transformácií v rovine

Trieda geometrických transformácií v rovine je množinou transformácií toho istého typu reprezentovaná maticou

$$G(t)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) & 0 \\ c(t) & d(t) & 0 \\ m(t) & n(t) & s(t) \end{pmatrix}$$

ktorej prvky sú reálne funkcie jednej premennej t, všetky definované, spojité a aspoň raz diferencovateľné na intervale $I=\langle 0,1\rangle$.

Trieda translácií

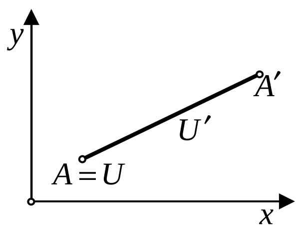
$$\mathbf{T}(t.m,t.n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t.m & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Príklady:

1.Nech geometrický útvar U je bod A so súradnicami (x^A, y^A), potom

$$(x^A,\ y^A,\ 1)\mathbf{T}(t.m\ ,\ t.n)=(x^A+t.m\ ,\ y^A+t.n\ ,\ 1)$$

je úsečka U' so začiatočným bodom $A(x^A,\ y^A)$ a koncovým bodom $A'(x^A+m, y^A+n)$

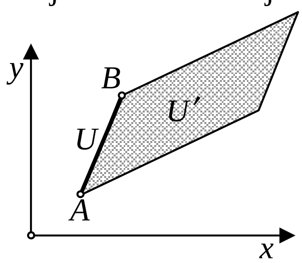


2.Nech geometrický útvar U je úsečka

$AB=\left\{x(u)=x^A+u(x^B-x^A), y(u)=y^A+u(y^B-y^A), u\in\langle 0,1\rangle\right\}$ potom

$$(x(u), y(u), 1)\mathbf{T}(t.m,t.n)=(x(u,t), y(u,t), 1) \qquad u,t\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$$

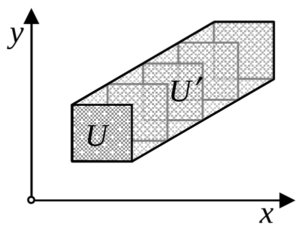
a obraz U' je oblasť v rovine t.j. rovnobežník a jeho vnútro.



3. Nech geometrický útvar U je oblasť - štvoruholník a jeho vnútro t.j. $U=(x(u,v), y(u,v)), u,v\in\Omega$

potom

$$(x(u,v), y(u,v), 1)\mathbf{T}(t.m,t.n)=(x(u,v,t), y(u,v,t), 1) \qquad u,v,t\in\Omega\times\langle 0,1\rangle$$



Hovoríme, že 3-parametrický útvar vyjadruje zmenu polohy 2-parametrického útvaru v čase t a to je práve prvok jednoduchej animácie.

Trieda otáčaní okolo začiatku súradnicovej sústavy

$$\mathbf{R}(t.\varphi)=\begin{pmatrix}\cos t.\varphi & \sin t.\varphi & 0\\ -\sin t.\varphi & \cos t.\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Trieda škálovaní

$$\mathbf{S}(t.s_x,t.s_y)=\begin{pmatrix}t.s_x & 0 & 0\\ 0 & t.s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Triedy geometrických transformácií v priestore

Trieda geometrických transformácií v priestore je množinou transformácií toho istého typu. Analyticky je určená maticou

$$G(t)=\begin{pmatrix}a(t) & b(t) & c(t) & 0\\ d(t) & e(t) & f(t) & 0\\ g(t) & i(t) & j(t) & 0\\ l(t) & m(t) & n(t) & s(t)\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Prvky matice sú reálne funkcie jednej premennej t, všetky definované, spojité a aspoň raz diferencovateľné na intervale $I=\langle 0,1\rangle$.

Trieda translácií

$$\mathbf{T}(t.l,t.m,t.n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ t.l & t.m & t.n & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Trieda otáčaní

xt-otáčanie okolo súradnicovej osi x o uhol t.θ_x

$$\mathbf{R}_x\left(t.\theta_x\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos t.\theta_x & \sin t.\theta_x & 0\\ 0 & -\sin t.\theta_x & \cos t.\theta_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

yt-otáčanie okolo súradnicovej osi y o uhol t.θ_y

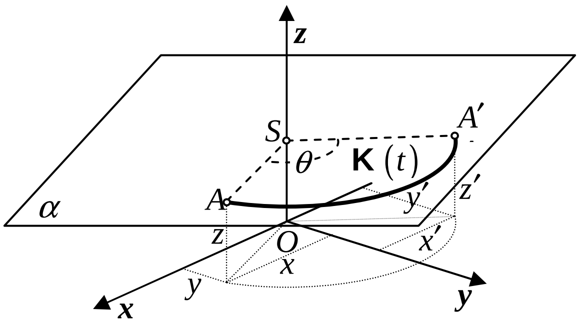
$$\mathbf{R}_y\left(t.\theta_y\right)=\begin{pmatrix}\cos t.\theta_y & 0 & -\sin t.\theta_y & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin t.\theta_y & 0 & \cos t.\theta_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

zt-otáčanie okolo súradnicovej osi z o uhol t.θ_z

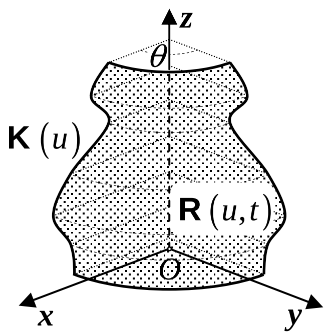
$$\mathbf{R}_z\left(t.\theta_z\right)=\begin{pmatrix}\cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0\\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Príklad:

1. Nech geometrický útvar U je bod A. Výsledný útvar je čiara $\mathbf{K}(t)$



2. Nech geometrický útvar je čiara $\mathbf{K}(t)$. Výsledný útvar je plocha $\mathbf{R}(u,t)$:



Trieda skrutkového pohybu

Pri skladaní transformácií sme je opísali maticu geometrickej transformácie - skrutkového pohybu v smere súradnicovej osi *z* - $\mathbf{SP}_z$. Vytvoríme triedu k tejto geometrickej transformácii, ktorá je reprezentovaná maticou

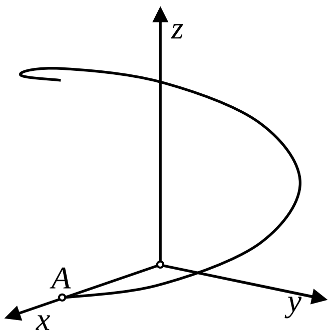
$$\mathbf{SP}_z\left(t.\theta_z\right)=\begin{pmatrix} \cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t\in\langle 0,1\rangle$$

Príklad:

Nech geometrický útvar *U* je bod *A* so súradnicami (x^A, y^A, z^A), potom

$$(x^A, y^A, z^A,\ 1)\mathbf{SP}_z(t.\theta_z)=(x^A\cos t.\theta_z - y^A\sin t.\theta_z, x^A\sin t.\theta_z + y^A\cos t.\theta_z, z^A + t.n\ , 1)$$

$$t\in\langle 0,1\rangle, \theta_z = 2\pi$$



Výsledok je priestorová krivka ***skrutkovica***.

Literatúra:

[1] Šedivý, Božek, Duplák, Kršňák: GEOMETRIA 2, SPN Bratislava, 1987
[2] www.fmph.uniba.sk ,vyhľadať Katedra AGDM, Polednová Marianna
[3] March,D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAGD,Springer 1999