1. **<u>SÚRADNICE BODU</u>**

Základným útvarom geometrie je bod a preto je dôležité opísať tento geometrický útvar pomocou čísel – súradníc.

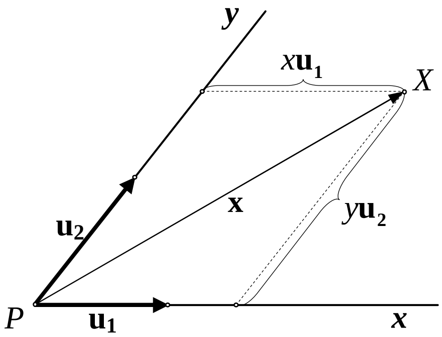
Najskôr sa budeme zaoberať rovinnou geometriou a teda budeme hovoriť o rovinnej súradnicovej sústave.

<u>Súradnice bodu v rovine</u>

Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice

Zvolíme v rovine E^2 bod P a vo vektorovom priestore V(E^2) bázu $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Vytvoríme trojicu $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, ktorú nazveme ***afinnou súradnicovou sústavou*** (obr.1.1). Pomocou tejto trojice priradíme každému bodu X roviny E^2 jeho polohový vektor:

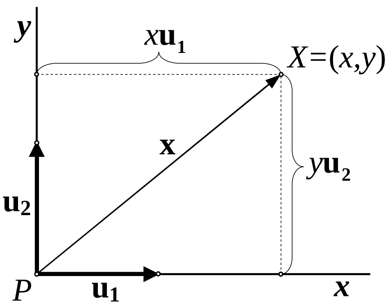
$$\mathbf{x} = PX = X - P = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \qquad (1.1)$$



Obr.1.1 Afinné súradnice bodu v rovine

Čísla x, y určené podmienkou (1.1) nazývame ***afinnými súradnicami bodu*** X v afinnej súradnicovej sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov roviny na množinu usporiadaných dvojíc reálnych čísel. Zápis (x, y) je ekvivalentný s podmienkou (1.1) a vyjadruje, že bod X má súradnice x, y v afinnej súradnicovej sústave. ***Súradnice vektora*** $\mathbf{x}$ v afinnej súradnicovej sústave $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ rozumieme jeho súradnice v báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Teda zápis $\mathbf{x}$ = (x, y) je ekvivalentný s rovnosťou: $\mathbf{x} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2$. Priamky určené daným bodom P a jedným vektorom $x = P + \mathbf{u}_1$, $y = P + \mathbf{u}_2$ sú súradnicové osi tejto sústavy.

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ nazveme ***karteziánskou súradnicovou sústavou*** ak vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ tvoria ortonormálnu bázu .



Obr.1.2 Karteziánske súradnice bodu v rovine

Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y)$ i ***vektora*** $\mathbf{x} = (x, y)$ sú jeho súradnice v karteziánskej súradnicovej sústave (obr.1.2). O báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ prislúchajúcej k tejto sústave budeme predpokladať, že je pravotočivá.

.

V neskorších aplikáciách budeme potrebovať rozšírené afinné súradnice bodov, ktoré zavedieme nasledovne:

Nech $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ je afinná súradnicová sústava v euklidovskej rovine. Usporiadanú trojicu čísel (X, Y, W), $W \neq 0$, nazveme ***rozšírené afinné (homogénne) súradnice vlastného bodu***, ak pre jeho afinné súradnice platí $x = \frac{X}{W}$, $y = \frac{Y}{W}$. Usporiadanú trojicu čísel $(X, Y, 0)$, nazveme ***rozšírené afinné (homogénne) súradnice nevlastného bodu,*** resp. ***smeru***.

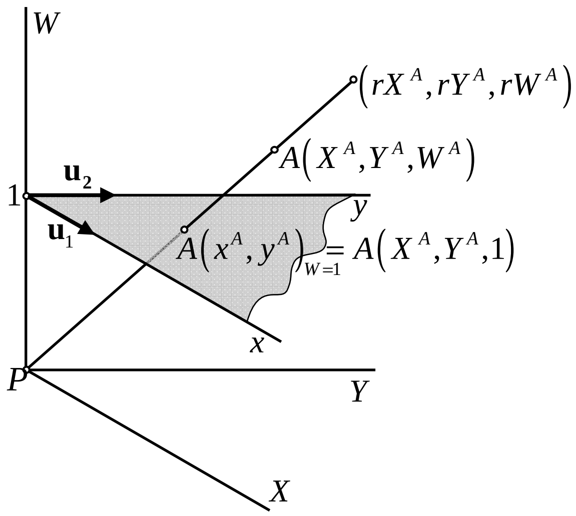
Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou rozšírených afinných súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

- nech (x, y) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom $(rX, rY, rW) = r(X, Y, W)$ sú rozšírené afinné súradnice tohto bodu.
- nech (x, y) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora **a** priamky a v rovine a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry) sú súradnice smerového vektora $r\mathbf{a}$ priamky a a $(rx, ry, 0) = (X, Y, 0)$ sú rozšírené afinné súradnice nevlastného bodu.

Vizualizácia modelu rozšírenia

Rozšírené afinné súradnice $(X, Y, 1)$ vlastného bodu sú špeciálny prípad jeho homogénnych súradníc.

Bod A v homogénnych súradniciach $r(X^A, Y^A, W^A)$, $r \neq 0$, je bodom priamky prechádzajúcej začiatkom P so smerovým vektorom (X^A, Y^A, W^A) v priestore $\langle P, X, Y, W \rangle$.



Afinné súradnice bodu určíme ako prienik priamky $\{X = t X^A, Y = t Y^A, W = t W^A\}$ s nadrovinou priestoru $\langle P, X, Y, W \rangle$, ktorou je rovina s rovnicou $W = 1$. Preto položíme $1 = t W^A$, určíme hodnotu parametra $t = \frac{1}{W^A}$ a afinné súradnice sú $\left(\frac{X^A}{W^A}, \frac{Y^A}{W^A}, 1 \right)$.

Príklady:

1. Bod má homogénne súradnice (X,Y,W) =(6,4,2), jeho afinné súradnice sú x = 3, y = 2.

2. Nech (1/3, 2/3) sú afinné súradnice bodu. Zapíšeme jeho homogénne súradnice napr. (1/3,2/3,1) = 1/3(1,2,3), (1/3,2/3,1) = 1/6(2,4,6), (1/3,2/3,1) = -1/3(-1,-2,-3). Teda body (1,2,3), (2,4,6), (-1,-2,-3) sú homogénne súradnice bodu (1/3, 2/3).

Často budeme pracovať s bodmi v trojrozmernom priestore E^3.

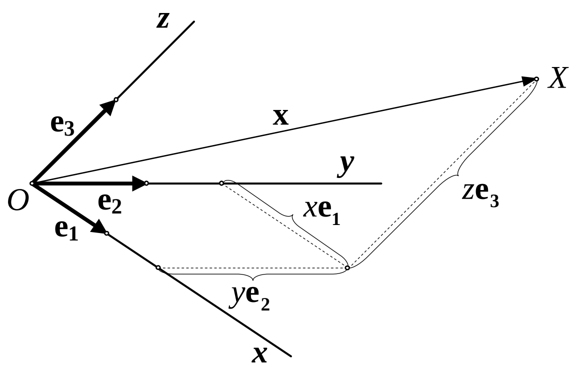
Súradnice bodu v priestore

Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice

Prejdime do priestoru E^3, kde určíme bod O (obr.1.3) a vo vektorovom priestore V(E^3) bázu troch vektorov $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Štvorica $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ je ***afinnou súradnicovou sústavou v priestore***. Pomocou tejto štvorice priradíme každému bodu X priestoru E^3 jeho polohový vektor :

$$\mathbf{x} = OX = X - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \qquad (1.2)$$

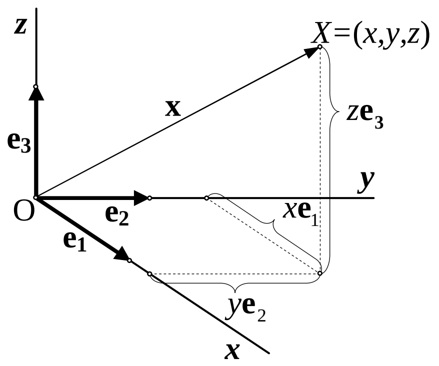
Čísla x, y, z určené podmienkou (1.2) nazývame ***afinnými súradnicami bodu*** X v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov roviny na množinu usporiadaných trojíc reálnych čísel. Zápis (x, y, z) je ekvivalentný s podmienkou (1.2) a vyjadruje, že bod X má súradnice x, y, z v afinnej súradnicovej sústave zvolenej v priestore E^3. ***Súradnice vektora*** $\mathbf{x}$ v afinnej súradnicovej



Obr.1.3 Afinné súradnice bodu v priestore

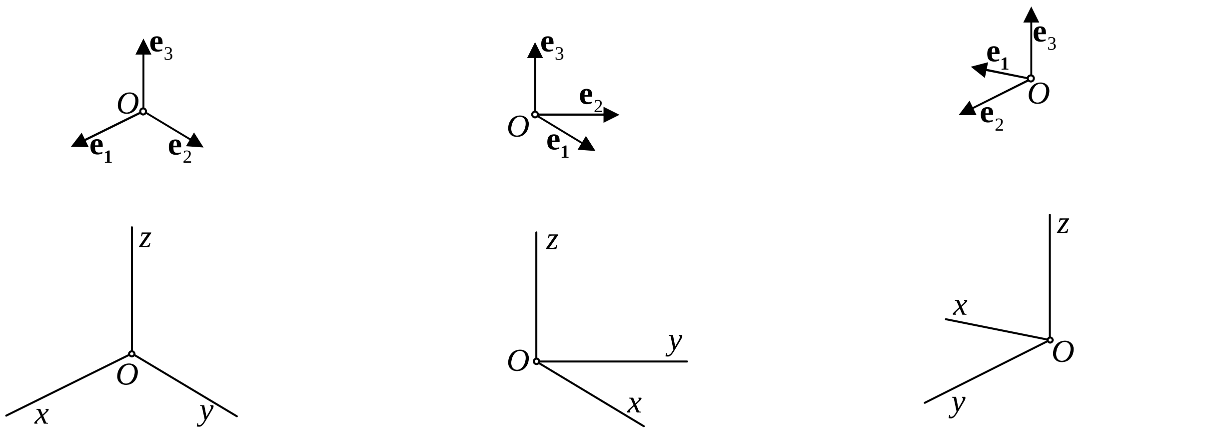
sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ rozumieme jeho súradnice v báze $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Zápis $\mathbf{x}$ = (x, y, z) a rovnosť $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ sú ekvivalentné. Priamky $x = O + \mathbf{e}_1$, $y = O + \mathbf{e}_2$, $z = O + \mathbf{e}_3$ sú súradnicové osi.

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ nazveme ***karteziánskou súradnicovou sústavou*** ak vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tvoria ortonormálnu bázu.



Obr.1.4 Karteziánske súradnice bodu v priestore

Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y, z)$ i ***vektora*** $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sú jeho súradnice (obr.1.4) v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Bázu $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ uvažujeme pravotočivú. Grafická ilustrácia ortonormálnej bázy $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a pravouhlého trojhranu $Oxyz$ je na obr.1.5.



Obr.1. 5 Pravotočivá ortonormálna báza

V euklidovskom priestore je daná afinná súradnicová sústava $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Usporiadanú štvoricu čísel (X, Y, Z, W), $W \neq 0$, nazveme ***rozšírené afinné (homogénne) súradnice vlastného bodu***, ak pre jeho afinné súradnice platí $x = \frac{X}{W}$, $y = \frac{Y}{W}$, $z = \frac{Z}{W}$. Usporiadanú štvoricu čísel $(X, Y, Z, 0)$ nazveme ***rozšírené afinné (homogénne) súradnice nevlastného bodu - smeru.***

.

Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou rozšírených afinných súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

- nech (x, y, z) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom $(rX, rY, rZ, rW) = r(X, Y, Z, W)$ sú rozšírené afinné súradnice tohto bodu.
- nech (x, y, z) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora $\mathbf{a}$ priamky v priestore a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry, rz) sú súradnice smerového vektora $r\mathbf{a}$ tejto priamky a $(rx, ry, rz, 0) = (X, Y, Z, 0)$ sú rozšírené afinné súradnice nevlastného bodu.

Príklady:

1. Bod má homogénne súradnice $(X,Y,Z,W) = (6,9,12,3)$, jeho afinné súradnice sú $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

2. Nech (2/5, 3/5, 4/5) sú afinné súradnice bodu. Zapíšeme jeho homogénne súradnice napr. (2/5, 3/5, 4/5,1) = 1/5(2,3,4,5), (2/5, 3/5, 4/5,1) = -2/5(-1,-3/2,-2,-5/2). Teda body (2,3,4,5), (-1,-3/2,-2,-5/2) sú homogénne súradnice bodu (2/5, 3/5, 4/5) .

Z bodov budeme vytvárať geometrické útvary v rovine alebo v priestore:

Geometrické útvary

Geometrickým útvarom je súvislá podmnožina priestoru E^2 resp. E^3, ktorú analyticky reprezentujeme bodovými funkciami *n*-premenných. Tieto funkcie sú spojitým zobrazením súvislej oblasti Ω.

Známe geometrické útvary v rovine E^2 resp. v priestore E^3 opisujeme vzhľadom na karteziánske súradnicové sústavy:

0-parametrický útvar:

bod $\left(x^A, y^A\right)$ v E^2 resp. $\left(x^A, y^A, z^A\right)$ v E^3 - *konštantná bodová funkcia*

1-parametrický útvar:

čiara $\left(x(u), y(u)\right)$ v E^2 resp. $\left(x(u), y(u), z(u)\right)$ v E^3 - *bodová funkcia jednej premennej* $u \in \Omega$

2-parametrický útvar:

oblasť $\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ v E^2 resp. ***plocha*** $\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ v E^3 - *bodová funkcia dvoch premenných* $u, v \in \Omega$

3-parametrický útvar:

teleso $\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$ v E^3 *bodová funkcia troch premenných* $u, v, w \in \Omega$

Literatúra:

[1] Hejný, Zaťko, Kršňák: GEOMETRIA 1, SPN Bratislava, 1985
[2] March,D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAGD,Springer 1999