

## STEREOMETRIA

EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR  $E_3 = (\beta, \mathbf{V}, +)$

$\beta$	body	$A, B, C$
$\mathbf{V}$	vektory	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
$+$	sčítavanie	$\beta + \mathbf{V}$

- $\square \forall A \in \beta, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} \in \beta$
- $\square \forall A \in \beta, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}: (A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
- $\square \forall A \in \beta, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = A \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $\square \forall A, B \in \beta, \exists! \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = B$

David **HILBERT** (1862-1943) nemecký matematik

## AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA EUKLIDOVSKÉHO PRIESTORU

Základné geometrické objekty:

$\beta$ : bod	$A, B, C \dots 1, 2, \dots$
$\wp$ : priamka	$a, b, c, \dots p, q, \dots$
$\mathcal{R}$ : rovina	$\alpha, \beta, \gamma, \dots \pi, \rho, \dots$

Základné relácie:

**\* incidencia \* usporiadanie \* zhodnosť \* spojitost' \* rovnobežnosť**

## HILBERTOVA AXIOMATICKÁ SÚSTAVA

### I. AXIOMY INCIDENCIE ( $I_1 - I_8$ )

**incidovať  $\approx$  ležať na  $\approx$  prechádzať  $\approx$  obsahovať**

*Def. 1* **Kolineárne body:** množina bodov incidentná s nejakou priamkou

**Komplanárne body:** množina bodov incidentná s nejakou rovinou

**$I_1$**  Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka s nimi incidentná

**$I_2$**  Na každej priamke existujú aspoň dva rôzne body.

**$I_3$**  Existujú body, ktoré neležia všetky na tej istej priamke.

**$I_4$**  Ku každým trom nekolineárnym bodom existuje práve jedna rovina s nimi incidentná.

**$I_5$**  V každej rovine ležia aspoň tri nekolineárne body.

**$I_6$**  Ak dva rôzne body priamky ležia v rovine, tak každý bod priamky leží v tejto rovine.

**$I_7$**  Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú spoločnú priamku.

**$I_8$**  Existujú body, ktoré všetky neležia v tej istej rovine.

## PLANIMETRICKÝ AXIOMATICKÝ SYSTÉM

- II. AXIOMY USPORIADANIA ( $U_1 - U_4$ )
- III. AXIOMY ZHODNOSTI ( $Z_1 - Z_6$ )
- IV. AXIOMY SPOJITOSTI ( $S_1 - S_2$ )
- V. AXIOMA ROVNOBEŽNOSTI ( $R_1$ )

**$R_1$**  Bodom neležiacim na danej priamke prechádza práve jedna priamka rovnobežná s danou priamkou.

*Def.2*

**Rovnoběžné priamky** [=rovnobežky] - priamky jednej roviny, ktoré nemajú spoločný bod  
**Rôznobežné priamky** [=rôznobežky] – dve priamky, ktoré majú práve jeden spoločný bod  
**Mimobežné priamky** [=mimobežky] – dve priamky, ktoré neležia v jednej rovine

*Def.3*

**Priamka je rôznobežná s rovinou** – ak priamka má s rovinou práve jeden spoločný bod  
**Rôznobežné roviny** – dve roviny, ktoré majú spoločnú práve jednu priamku  
**Priesečník** – spoločný bod priamky a roviny  
**Priesečnica** – spoločná priamka rovín

*Def.4*

**Trs priamok** – množina všetkých priamok prechádzajúcich jedným bodom  
**Zväzok rovín** - množina všetkých rovín prechádzajúcich jednou priamkou

*Tvr.1*

Rovina je určená :

- a) priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
- b) dvomi (rôznymi) rovnobežkami
- c) dvomi rôznobežkami

*Def.5*

**Dve priamky sú rovnobežné** práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod

**Priamka je rovnobežná s rovinou** práve vtedy, keď alebo v rovine leží alebo nemajú spoločný bod

**Dve roviny sú rovnobežné** práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo nemajú spoločný bod

*Tvr.2*

Úplná klasifikácia vzájomnej polohy základných geometrických útvarov

- Dve priamky sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné** alebo **mimobežné**
- Priamka je s rovinou alebo **rovnobežná** alebo **rôznobežná**
- Dve roviny sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné**

## Základné vety o rovnobežných geometrických útvaroch

### Veta 1 K1. Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny.

Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď je rovnobežná s priamkou roviny

#### A1. Algoritmus konštrukcie: priamka prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.

Dané:  $M$ - bod,  $\alpha$ - rovina,  $M \notin \alpha$

- A1: 1.  $m \subset \alpha$ ,  $m$  – ľubovoľná priamka  
2.  $a: M \in a, a \parallel m$

**Veta 2** Ak sú dve roviny navzájom rovnobežné, tak každá priamka jednej z nich je rovnobežná s druhou rovinou.

**Veta 3** Ak priamky  $a, b$  sú rovnobežky a priamka  $b$  je rovnobežná s rovinou  $\alpha$ , tak je aj priamka  $a$  rovnobežná s rovinou  $\alpha$ .

**Veta 4** Ak priamky  $a, b$  sú rovnobežky aj priamky  $b, c$  sú rovnobežky, tak sú aj priamky  $a, c$  rovnobežky.

**Veta 5** Ak priamka  $a$  je rovnobežná s rovinou  $\alpha$ , ktorá je rovnobežná s rovinou  $\beta$ , tak je priamka  $a$  rovnobežná s rovinou  $\beta$ .

### Veta 6 K2. Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

**Veta 7** Ak roviny  $\alpha, \beta$  sú rovnobežné aj roviny  $\beta, \gamma$  sú rovnobežné, tak je aj rovina  $\alpha$  rovnobežná s rovinou  $\gamma$ .

**Veta 8** Existuje práve jedna rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.

#### A2. Algoritmus konštrukcie : rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou

Dané:  $M$ - bod,  $\alpha$ - rovina,  $M \notin \alpha$

- A2: 1.  $a, b: a \cup b \subset \alpha, a \cap b = \{R\}$   
2.  $a': M \in a', a' \parallel a$   
 $b': M \in b', b' \parallel b$

Def.6

**Osnova priamok**- množina všetkých navzájom rovnobežných priamok

**Osnova rovín** - množina všetkých navzájom rovnobežných rovín

**Priestorová vrstva** – množina bodov medzi dvomi rovinami osnovy

## Úlohy o vzájomnej polohe základných geometrických útvarov

### VOLNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

- Základná invariantná vlastnosť – ROVNOBEŽNOSŤ
- Základný invariant – DELIACI POMER

Úloha : Určte vzájomnú polohu priamky a roviny

Dané:  $a$ - priamka ,  $\alpha$ - rovina

#### **A3. Algoritmus konštrukcie : priesečník priamky s rovinou**

Dané:  $a$ - priamka ,  $\alpha$ - rovina

- A3:** 1.  $\beta : a \subset \beta$ , vhodná rovina  
2.  $m = \alpha \cap \beta$   
3.  $\{R\} = a \cap m = a \cap \alpha$

**Priečka priamky** – každá priamka, ktorá danú priamku pretína ( je s ňou rôznobežná )

Úloha : Zostrojíte priechku mimobežných priamok, ktorá prechádza daným bodom

Dané:  $a, b$  - mimobežky ,  $M$ - bod (  $M \notin a, M \notin b$  )

#### **A4. Algoritmus konštrukcie : priechka mimobežiek incidujúca daným bodom**

Dané:  $a, b$  - mimobežky ,  $M$ - bod (  $M \notin a, M \notin b$  )

- A4:** 1.  $\alpha = aM, \beta = bM$   
2.  $\alpha \cap \beta = p$   
3.  $p \times a \wedge p \times b \Rightarrow p$  – priechka

Úloha : Zostrojíte priechku mimobežných priamok rovnobežnú s danou priamkou  $s$

Dané:  $a, b$  - mimobežky ,  $s$  - priamka ( nie je rovnobežná ani s  $a$  ani s  $b$  )

#### **A5. Algoritmus konštrukcie : priechka mimobežiek rovnobežná s danou priamkou**

Dané:  $a, b$  - mimobežky ,  $s$  - priamka ( nie je rovnobežná ani s  $a$  ani s  $b$  )

- A5:** 1.  $\alpha = as', s' \parallel s, \beta = bs'', s'' \parallel s$   
2.  $\alpha \cap \beta = p$   
3.  $p$  existuje  $\Rightarrow p$  – priechka

## Uhly základných geometrických útvarov. Kolmost'. Metrické vzťahy.

### Veta 9

Nech  $a, b$  sú dve nie rovnobežné priamky;  $V', V''$  dva rôzne body a  $a', b'; a'', b''$  dvojice priamok, pre ktoré  $V' \in a' \cap b', V'' \in a'' \cap b''$ ,  
 $a' \parallel a'', b' \parallel b''$ .

Potom platí :  $\angle a' b' \cong \angle a'' b''$

### Def. 7

**Uhol priamok  $a, b$**  - uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok

$a', b'$ , pre ktoré platí  $a' \parallel a, b' \parallel b$ .

**Kolmé priamky** - dve priamky, ktorých uhol je pravý

**Priamka kolmá na rovinu [ = kolmica na rovinu ]** - priamka kolmá na všetky priamky roviny

### Veta 10 K3. Kritérium kolmosti priamky a roviny.

**Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky tejto roviny**

### Veta 11

Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.

### Veta 12

Existuje jediná rovina prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú priamku

### Def. 8

**Päta kolmice z bodu na rovinu** - priesečník kolmice a roviny

**Vzdialenosť bodu od roviny** - dĺžka úsečky  $MP$ , kde bod  $P$  je päta kolmice z bodu  $M$  na rovinu

**Vzdialenosť rovnobežných rovín** - vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z rovín od druhej roviny

### Veta 13

Priamkou, ktorá nie je kolmá na danú rovinu, prechádza práve jedna rovina kolmá na danú rovinu.

### Def. 10

**Kolmo premietacia rovina priamky** - rovina incidujúca priamkou a kolmá na danú rovinu

**Kolmý priemet priamky do roviny** - priesečnica kolmo premietacej roviny priamky a danej roviny

### Def. 11

**Uhol priamky s rovinou je pravý**, ak je priamka kolmá na rovinu

**Uhol priamky s rovinou** - uhol priamky a jej kolmého priemetu do roviny

### Def. 12

**Uhol dvoch rovnobežných rovín** - nulový uhol

**Uhol rôznobežných rovín  $\alpha, \beta$**  - uhol priamok  $a, b$  ( $a \subset \alpha, b \subset \beta$ ,

$a \perp \alpha \cap \beta, b \perp \alpha \cap \beta$ )

**Roviny sú kolmé**, ak je ich uhol pravý

### *Dôsledok*

Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu

### *Dôsledok*

Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny

### *Veta 14* **K4. Kritérium kolmosti dvoch rovín**

**Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z nich obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.**

### *Veta .15 ( Veta o priemete pravého uhla )*

Kolmým priemetom dvoch kolmých priamok do roviny sú kolmé priamky, ak aspoň jedna z priamok je rovnobežná s rovinou a druhá nie je na rovinu kolmá.

### *Def. 13*

**Os mimobežiek** - priečka kolmá na obe mimobežky

**A6. Algoritmus** konštrukcie : **os mimobežiek**

**Dané:**  $a, b$  - mimobežky

**A6:** 1.  $\rho \perp a, \sigma \perp b$

2.  $\rho \cap \sigma = k$

3.  $k$  existuje a  $k \perp a \wedge k \perp b \Rightarrow k - os$

## ZÁKLADNÉ GEOMETRICKÉ TELESÁ

### *Hranolová plocha Hranolový priestor Hranol*

Nech  $P_n$  je ľubovoľný  $n$ -uholník v rovine  $\alpha$  a  $l$  je priamka rôznobežná s rovinou  $\alpha$ .

**Hranolová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a patria do osnovy priamky  $l$

**Hranolový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro a patria do osnovy priamky  $l$

#### Súvisiace pojmy

- **určujúci  $n$ -uholník plochy** -  $n$ -uholník  $P_n$
- **osnovová priamka** – priamka  $l$  a každá rovnobežka s priamkou  $l$
- **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou  $l$
- **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho  $n$ -uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho  $n$ -uholníka
- **styčná rovina plochy** – osnovová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy

**Hranol** – prienik hranolového priestoru  $H$  a priestorovej vrstvy určenej dvojicou rovnobežných rovín  $\alpha, \alpha' \neq \alpha$ , ktoré nie sú osnovovými rovinami plochy

#### Súvisiace pojmy

- **podstavy hranola** -  $n$ -uholníky  $H \cap \alpha, H \cap \alpha'$  (zhodné)
- **vrcholy hranola** – vrcholy podstáv
- **bočné hrany** – časti hrán príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu
- **podstavové hrany** – strany podstáv
- **bočné steny** – časti stien príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu (rovnobežníky)
- **steny hranola** - podstavy a bočné steny

**Kolmý hranol** - bočné steny sú kolmé na rovinu podstavy

**Šikmý hranol** – hranol, ktorý nie je kolmý

**Pravidelný  $n$ - boký hranol** – kolmý hranol, určujúci  $n$ -uholník je pravidelný  $n$ -uholník

**Nepřavidelný  $n$ - boký hranol** – určujúci  $n$ -uholník je nepravidelný  $n$ -uholník

**Ravnobežnosten** – hranol, ktorého podstava je rovnobežník

**Kváder** – kolmý hranol, ktorého podstava je obdĺžnik

**Kocka** - pravidelný hranol, ktorého každá stena je štvorec

#### Súvisiace pojmy:

- **výška hranola** – vzdialenosť rovín podstáv
- **os hranola** - v pravidelnom hranole spojnice stredov podstáv

## ***Ihlanová plocha Ihlanový priestor Ihlan***

Nech  $P_n$  je ľubovoľný  $n$ -uholník v rovine  $\alpha$  a  $V$  je bod neležiaci v rovine  $\alpha$ .

**Úplná ihlanová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a prechádzajú bodom  $V$

**Úplný ihlanový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro a prechádzajú bodom  $V$

**Jednoduchá ihlanová plocha** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$

**Jednoduchý ihlanový priestor** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú  $n$ -uholník  $P_n$  a jeho vnútro

### Súvisiace pojmy

- **určujúci  $n$ -uholník plochy** -  $n$ -uholník  $P_n$
- **vrchol** – bod  $V$
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca bodom  $V$
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca bodom  $V$
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho  $n$ -uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho  $n$ -uholníka
- **stýčná rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy

**Ihlan** – prienik jednoduchého ihlanového priestoru  $I$  a polpriestoru  $\alpha V$  s hraničnou rovinou  $\alpha$  pretínajúcou všetky tvoriace polpriamky príslušnej ihlanovej plochy a neprechádzajúcou vrcholom  $V$  plochy

### Súvisiace pojmy

- **podstava ihlana** -  $n$ -uholník  $I \cap \alpha$
- **vrcholy ihlana** – vrchol  $V$  a vrcholy podstavy
- **bočné hrany ihlana** – časti hrán príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **podstavové hrany** – strany podstavy
- **bočné steny** – časti stien príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **steny ihlana** - podstava a bočné steny
- **výška ihlana** - vzdialenosť vrchola  $V$  od roviny podstavy

**Kolmý ihlan** - spojnice stredy podstavy a vrchola  $V$  je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý ihlan** – ihlan, ktorý nie je kolmý

**Pravidelný  $n$ - boký ihlan** – kolmý ihlan, určujúci  $n$ -uholník je pravidelný  $n$ -uholník

**Nepravidelný  $n$ - boký ihlan** – určujúci  $n$ -uholník je nepravidelný  $n$ -uholník

**Štvorsten** – všetky steny sú trojuholníky

**Pravidelný štvorsten** – všetky steny sú rovnostranné trojuholníky



## ***Kružnicová valcová plocha   Kruhový valcový priestor   Kruhový valec***

Nech  $k$  je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine  $\alpha$  a  $l$  je priamka rôznobežná s rovinou  $\alpha$ .

**Kružnicová valcová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu  $k$  a patria do osnovy priamky  $l$

**Kruhový valcový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh  $k$  a patria do osnovy priamky  $l$

### Súvisiace pojmy

- **určujúca kružnica [kruh]** – kružnica [ kruh ]  $k$
- **osnovová priamka** – priamka  $l$  a každá rovnobežka s priamkou  $l$
- **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou  $l$
- **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche
- **dotyková rovina** – osnovová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku

**Kruhový valec - Valec** – prienik kruhového valcového priestoru  $V$  a priestorovej vrstvy určenej nie osnovými rovinami  $\alpha, \alpha' \neq \alpha$ , ktorých prienik s kruhovým valcovým priestorom sú kruhy

### Súvisiace pojmy

- **podstavy valca** - kruhy  $V \cap \alpha, V \cap \alpha'$  ( zhodné )
- **výška valca** – vzdialenosť rovín podstáv
- **strana valca** – úsečka hranice, ktorej krajné body sú na rôznych podstavách
- **stred podstavy** – stred kruhu

**Kolmý [rotačný] valec** - spojnice stredov podstáv je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý valec** – valec, ktorý nie je kolmý

**Rovnostranný valec** - výška kolmého valca je zhodná s priemerom podstavy

## ***Kružnicová kuželová plocha   Kruhový kuželový priestor   Kruhový kužel'***

Nech  $k$  je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine  $\alpha$  a  $V$  je bod neležiaci v rovine  $\alpha$ .

**Úplná kružnicová kuželová plocha** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu  $k$  a prechádzajú bodom  $V$

**Úplný kruhový kuželový priestor** - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh  $k$  a prechádzajú bodom  $V$

**Jednoduchá kružnicová kuželová plocha** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú kružnicu  $k$

**Jednoduchý kruhový kuželový priestor** - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode  $V$ , ktoré pretínajú kruh  $k$

### Súvisiace pojmy

- **určujúca kružnica [kruh]** – kružnica [ kruh ]  $k$
- **vrchol** – bod  $V$
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca bodom  $V$
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca bodom  $V$
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **dotyková rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu tvoriacu priamku plochy

**Kruhový kužel' - Kužel'** – prienik jednoduchého kužel'ového priestoru  $K$  a polpriestoru  $\alpha V$  s hraničnou rovinou  $\alpha$ , ktorá pretína príslušný priestor v kruhu

### Súvisiace pojmy

- **podstava kužel'a** – kruh  $K \cap \alpha$
- **výška kužel'a** - vzdialenosť vrcholu  $V$  od roviny podstavy
- **stred podstavy** – stred kruhu
- **hrana kužel'a** – hranica podstavy kužel'a
- **strana kužel'a** – úsečka  $VM$ ,  $M$  – bod hrany kužel'a

**Kolmý [ rotačný ] kužel'** – spojnica stredu podstavy a vrcholu  $V$  je kolmá na rovinu podstavy

**Šikmý kužel'** - kužel', ktorý nie je rotačný

**Rovnostranný kužel'** – kolmý kužel', ktorého dĺžka strany je zhodná s priemerom podstavy

## ***Gul'ová plocha*** ***Gul'a***

Nech  $S$  je bod priestoru a  $r$  je kladné číslo

**Gul'ová plocha** – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť  $v$  od bodu  $S$  je zhodná s číslom  $r$

**Gul'a** – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť  $v$  od bodu  $S$  spĺňa nerovnosť  $0 \leq v \leq r$

### Súvisiace pojmy

- **stred** – bod  $S$
- **polomer**- číslo  $r$ , dĺžka úsečky  $SA$ ,  $A$  bod gul'ovej plochy
- **priemer** – číslo  $d = 2r$
- **hlavná kružnica**- kružnica na gul'ovej ploche, s polomerom zhodným s polomerom gul'ovej plochy
- **vedľajšie kružnice** – ostatné kružnice na gul'ovej ploche
- **dotyková rovina** – rovina, ktorá má s gul'ovou plochou spoločný práve jeden bod
- **dotykový bod** – spoločný bod gul'ovej plochy a dotykovej roviny