GEOMETRIA 4 – KONŠTRUKČNÁ GEOMETRIA

Obsahom predmetu je súhrn poznatkov viacerých geometrických disciplín od elementárnej planimetrie a stereometrie, syntetickej deskriptívnej geometrie, cez analytickú a diferenciálnu geometriu až po počítačovú geometriu.

- ELEMENTÁRNA PLANIMETRIA (Geometria 3)
- STEREOMETRIA (Geometria 4)
- DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA (Geometria 4)
- ANALYTICKÁ GEOMETRIA(Geometria 1)
- DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA (Mat.analýza, Geometria 2)
- POČÍTAČOVÁ GEOMETRIA

Štúdium Geometrie 4 je zamerané na rozvíjanie
- priestorovej predstavivosti
- konštrukčných zručností

pri zostrojovaní priemetov priestorových objektov vo vybraných zobrazovacích metódach a na syntetické metódy riešenia geometrických úloh o vzájomnej polohe objektov v priestore.

GEOMETRIA 4 zimný semester

I. STEREOMETRIA
II. ZÁKLADNÉ GEOMETRICKÉ TELESÁ
III. PRINCÍPY PREMIETANIA
IV. ZOBRAZOVACIE METÓDY

Literatúra:
Piják a kol.: Konštrukčná geometria, SPN, Bratislava,1985
Urban,A: Deskriptivní geometrie I.,SNTL, Praha,1965
Kraemer,E: Zobrazovací metody I, SPN, Praha, 1991
Bašová, Kyselová,…: Deskriptívna geometria-návody na cvičenia, STU,Bratislava 2000

I. STEREOMETRIA

EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR je trojica $E_3 = (\mathcal{B}, \mathbf{V}, +)$

$\mathcal{B}$ body *A,B,C*

V vektory **a, b, c**

\+ sčitovanie $\mathcal{B} + \mathbf{V}$

- $\forall A \in \mathcal{B}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} \in \mathcal{B}$
- $\forall A \in \mathcal{B}, \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}: (A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
- $\forall A \in \mathcal{B}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = A \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $\forall A,B \in \mathcal{B}, \exists! \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = B$

AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA EUKLIDOVSKÉHO PRIESTORU bola opísaná nemeckým matematikom Davidom **HILBERTOM** (1862-1943).

Základné geometrické objekty priestoru:

$\mathcal{B}$: **bod** *A,B,C … 1,2,…*

$\wp$: **priamka** *a, b, c, …p,q…*

$\mathfrak{R}$: **rovina** α, β, γ,…π, ρ…

Základné relácie:

∗ incidencia ∗ usporiadanie ∗ zhodnosť ∗ spojitosť ∗ rovnobežnosť

HILBERTOVA AXIOMATICKÁ SÚSTAVA obsahuje axiomy rozdelené do piatich skupín podľa základných relácií.

I. **AXIOMY INCIDENCIE ($\mathbf{I_1 – I_8}$)** požiadavky relácie vzájomnej polohy bodov, priamok a rovín

incidovať ≈ ležať na ≈ prechádzať ≈ obsahovať

Definícia I.1

Kolineárne body: množina bodov incidentná s nejakou priamkou

Komplanárne body: množina bodov incidentná s nejakou rovinou

$\mathbf{I_1}$ Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka s nimi incidentná

$\mathbf{I_2}$ Na každej priamke existujú aspoň dva rôzne body.

$\mathbf{I_3}$ Existujú body, ktoré neležia všetky na tej istej priamke.

$\mathbf{I_4}$ Ku každým trom nekolineárnym bodom existuje práve jedna rovina s nimi incidentná.

$\mathbf{I_5}$ V každej rovine ležia aspoň tri nekolineárne body.

$\mathbf{I_6}$ Ak dva rôzne body priamky ležia v rovine, tak každý bod priamky leží v tejto rovine.

$\mathbf{I_7}$ Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú spoločnú priamku.

$\mathbf{I_8}$ Existujú body, ktoré všetky neležia v tej istej rovine.

PLANIMETRICKÝ AXIOMATICKÝ SYSTÉM

II. **AXIOMY USPORIADANIA (U_1 - U_4)**

III. **AXIOMY ZHODNOSTI (Z_1 - Z_6)**

IV. **AXIOMY SPOJITOSTI (S_1 - S_2)**

V. **AXIOMA ROVNOBEŽNOSTI (R_1)**

R_1 Euklidova axioma
Bodom neležiacim na danej priamke prechádza práve jedna priamka rovnobežná s danou priamkou.

Lobačevského axioma
Bodom neležiacim na danej priamke prechádzajú aspoň dve priamky rovnobežné s danou priamkou.

GEOMETRIA TROJROZMERNÉHO EUKLIDOVSKEHO PRIESTORU

STEREOMETRIA

- **AXIOMY INCIDENCIE**
- **AXIOMY USPORIADANIA**
- **AXIOMY ZHODNOSTI**
- **AXIOMY SPOJITOSTI**
- **AXIOMA ROVNOBEŽNOSTI**

Dôsledky AXIOM INCIDENCIE:

1. Dve rôzne priamky majú najviac jeden spoločný bod

2. Rovina a priamka s ňou neincidentná majú najviac jeden spoločný bod

3. Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú spoločnú práve jednu priamku s týmto bodom incidentnú

Definícia I.2

Rovnobežné priamky [=rovnobežky] - priamky jednej roviny, ktoré nemajú spoločný bod
Rôznobežné priamky [=rôznobežky] – dve priamky, ktoré majú práve jeden spoločný bod
Mimobežné priamky [=mimobežky] – dve priamky, ktoré neležia v jednej rovine

Definícia I.3

Priamka je rôznobežná s rovinou – ak priamka má s rovinou práve jeden spoločný bod
Rôznobežné roviny – dve roviny, ktoré majú spoločnú práve jednu priamku
Priesečník – spoločný bod priamky a roviny
Priesečnica – spoločná priamka rovín

Definícia I.4

Trs priamok – množina všetkých priamok prechádzajúcich jedným bodom
Zväzok rovín- množina všetkých rovín prechádzajúcich jednou priamkou

Tvrdenie I.1
Rovina je určená :

a) priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
b) dvomi (rôznymi) rovnobežkami
c) dvomi rôznobežkami

Definícia I.5
Dve priamky sú rovnobežné práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod
Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď alebo v rovine leží alebo nemajú spoločný bod
Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo nemajú spoločný bod

Tvrdenie I.2
Úplná klasifikácia vzájomnej polohy základných geometrických útvarov

- Dve priamky sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné** alebo **mimobežné**
- Priamka je s rovinou alebo **rovnobežná** alebo **rôznobežná**
- Dve roviny sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné**

Základné vety o rovnobežných geometrických útvaroch

Veta I.1 **K1. Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny**.
Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď je rovnobežná s priamkou roviny

A1. Algoritmus konštrukcie: **priamka prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.**
Dané: M- bod, α- rovina, $M \notin \alpha$

A1: 1. $m \subset \alpha$, m – ľubovoľná priamka
2. a: $M \in a$, $a \,||\, m$

Veta I.2 Ak sú dve roviny navzájom rovnobežné, tak každá priamka jednej z nich je rovnobežná s druhou rovinou.

Veta I.3 Ak priamky a,b sú rovnobežky a priamka b je rovnobežná s rovinou α, tak je aj priamka a rovnobežná s rovinou α.

Veta I.4 Ak priamky a,b sú rovnobežky aj priamky b,c sú rovnobežky, tak sú aj priamky a,c rovnobežky.

Veta I.5 Ak priamka a je rovnobežná s rovinou α, ktorá je rovnobežná s rovinou β, tak je priamka a rovnobežná s rovinou β.

Veta I.6 **K2. Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín**
Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

Veta I.7 Ak roviny α, β sú rovnobežné aj roviny β, γ sú rovnobežné, tak je aj rovina α rovnobežná s rovinou γ.

Definícia I.6
Osnova priamok- trieda všetkých navzájom rovnobežných priamok
Osnova rovín - trieda všetkých navzájom rovnobežných rovín
Priestorová vrstva – množina bodov medzi dvomi rovinami osnovy

Veta I.8 Existuje práve jedna rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.

A2. Algoritmus konštrukcie : **rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou**

Dané: *M*- bod, α - rovina, $M \notin \alpha$

A2: 1. $a, b: a \cup b \subset \alpha, a \cap b = \{R\}$
2. $a': M \in a', a' || a$
$b': M \in b', b' || b$

Úlohy o vzájomnej polohe základných geometrických útvarov

Konštrukčná stereometrická úloha

- **Rozbor**
- **Konštrukcia**
- **Dôkaz**
- **Diskusia**

Konštrukcia v stereometrii - algoritmus vytvorenia priestorového objektu pomocou elementárnych konštrukcií

ELEMENTÁRNE KONŠTRUKCIE

1. Zostrojiť rovinu incidentnú s danými tromi nekolineárnymi bodmi
2. Zostrojiť priesečnicu dvoch rôznobežných rovín
3. Riešiť v danej rovine ľubovoľnú planimetrickú úlohu
4. Zvoliť
   - Ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] na danej priamke
   - Ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] v danej rovine
   - Ľubovoľnú priamku, ktorá prechádza [neprechádza] daným bodom
   - Ľubovoľnú priamku, ktorá leží [neleží] v danej rovine
   - Ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s daným bodom
   - Ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s danou priamkou
5. Zostrojiť …

Riešenie polohových úloh je ilustrované na jednoduchých telesách, presnejšie na ich rovnobežných priemetoch.

VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

- Základná invariantná vlastnosť – ROVNOBEŽNOSŤ
- Základný invariant – DELIACI POMER

Úloha : Určte vzájomnú polohu priamky a roviny
Dané: a- priamka , α- rovina

A3. Algoritmus konštrukcie : **priesečník priamky s rovinou**
Dané: a- priamka , α- rovina

A3: 1. $\beta : a \subset \beta$, vhodná rovina
2. $m = \alpha \cap \beta$
3. $\{R\} = a \cap m = a \cap \alpha$

Príklad : Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte priesečník priamky $a=A'C$ s rovinou
$\alpha = AB'D'$.

Úloha : Určte vzájomnú polohu troch navzájom rôznych rovín
1: $\alpha \,||\, \beta$
1a: $\alpha \,||\, \beta \wedge \alpha \,||\, \gamma \Rightarrow \beta \,||\, \gamma$
1b: $\alpha \,||\, \beta \wedge \alpha \cap \gamma = \{a\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = \{b\} \wedge a \,||\, b$

2: $\alpha \cap \beta = \{c\}$
2a: $c \subset \gamma \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{c\}$
2b: $c \cap \gamma = \{M\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{M\}$
2c: $c \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma = \{a\} \wedge \beta \cap \gamma = \{b\} \wedge a \,||\, b \,||\, c$

Tvrdenie I.3
Klasifikácia vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín
- Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné
- Dve rovnobežné roviny pretína tretia v navzájom rovnobežných priesečniciach
- Všetky tri roviny majú spoločnú priamku
- Všetky tri roviny majú spoločný práve jeden bod
- Všetky dvojice rovín sú navzájom rôznobežné a ich priesečnice sú navzájom rovnobežné priamky

Príklad : Zostrojiť rovinný rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = KLM$, ak
$(AA'K) = (ABL) = -3$ a $(CC'M) = -1$.

Priečka priamky – každá priamka, ktorá danú priamku pretína (je s ňou rôznobežná)

Úloha : Zostrojiť priečku mimobežných priamok, ktorá prechádza daným bodom
Dané: a , b - mimobežky , M- bod ($M \notin a$, $M \notin b$)

Príklad : V kvádri $ABCDA'B'C'D'$ zostrojiť priečku mimobežiek $a = BC'$, $b = B'D'$,
ktorá prechádza bodom M, $(AA'M) = -3$.

A4. Algoritmus konštrukcie : **priečka mimobežiek incidujúca daným bodom**
Dané: a , b - mimobežky , M- bod ($M \notin a$, $M \notin b$)

A4: 1. $\alpha = aM$, $\beta = bM$
2. $\alpha \cap \beta = p$
3. p X $a \wedge p$ X $b \Rightarrow p$ – priečka

Úloha : Zostrojiť priečku mimobežných priamok rovnobežnú s danou priamkou s
Dané: a , b - mimobežky , s - priamka (nie je rovnobežná ani s a ani s b)

A5. Algoritmus konštrukcie : **priečka mimobežiek rovnobežná s danou priamkou**
Dané: a , b - mimobežky , s - priamka (nie je rovnobežná ani s a ani s b)

A5: 1. $\alpha = as'$, $s' || s$, $\beta = bs''$, $s'' || s$
2. $\alpha \cap \beta = p$
3. p existuje $\Rightarrow p$ – priečka

Príklad : V kocke $ABCDA'B'C'D'$ zostrojiť priečku mimobežiek $a = A'S$, $S = AC \cap BD$, $b=BE$, $(DD'E) = 3$, rovnobežnú s priamkou $s = AB$.

Uhly základných geometrických útvarov. Kolmosť. Metrické vzťahy.

Tvrdenie I.4
Nech a, b sú dve nie rovnobežné priamky; V', V'' dva rôzne body a a', b'; a'', b'' dvojice priamok, pre ktoré $V' \in a' \cap b'$, $V'' \in a'' \cap b''$, $a' || a || a''$, $b' || b || b''$. Potom platí : $\angle a' b' \cong \angle a'' b''$.

Definícia I.7
Uhol priamok *a,b* - uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok a', b', pre ktoré platí $a' || a$, $b' || b$.
Kolmé priamky - dve priamky, ktorých uhol je pravý
Priamka kolmá na rovinu [= kolmica na rovinu] - priamka kolmá na všetky priamky roviny

Príklad : V kvádri $ABCDA'B'C'D'$ určiť uhol priamok $a = BD'$, $b = B'C$. Konštrukcia $|AB| = 5$, $|BC| = 4$, $|AA'| = 7$.

Veta I.9 **K3. Kritérium kolmosti priamky a roviny**.
Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky tejto roviny.

Veta I.10 Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.
Dôsledok Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú rovnobežné

Veta I.11 Existuje jediná rovina prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú priamku

Dôsledok Všetky roviny kolmé na tú istú priamku sú rovnobežné

Definícia I.8
Päta kolmice z bodu na rovinu - priesečník kolmice a roviny
Vzdialenosť bodu od roviny - dĺžka úsečky *MP*, kde bod *P* je päta kolmice z bodu *M* na rovinu
Vzdialenosť rovnobežných rovín - vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z rovín od druhej roviny

Veta I.12 Priamkou, ktorá nie je kolmá na danú rovinu, prechádza práve jedna rovina kolmá na danú rovinu.

Definícia I.9
Kolmo premietacia rovina priamky - rovina incidujúca priamkou a kolmá na danú rovinu
Kolmý priemet priamky do roviny - priesečnica kolmo premietacej roviny priamky a danej roviny

Definícia I.10
Uhol priamky s rovinou je pravý , ak je priamka kolmá na rovinu
Uhol priamky s rovinou - uhol priamky a jej kolmého priemetu do roviny

Príklad : V kocke *ABCDA'B'C'D'* určiť vzdialenosť bodu *B'* od roviny *A'BC'* a uhol priamky *BB'* s rovinou *A'BC'*.

Definícia I.11
Uhol dvoch rovnobežných rovín - nulový uhol
Uhol rôznobežných rovín α, β - uhol priamok a, b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp \alpha \cap \beta$, $b \perp \alpha \cap \beta$)
Roviny sú kolmé, ak je ich uhol pravý

Dôsledok Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu

Dôsledok Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny

Veta I.13 **K4. Kritérium kolmosti dvoch rovín**.
Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z nich obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

Veta I.14 Kolmým priemetom dvoch kolmých priamok do roviny sú kolmé priamky, ak aspoň jedna z priamok je rovnobežná s rovinou a druhá nie je na rovinu kolmá.

Definícia I.12
Os mimobežiek - priečka kolmá na obe mimobežky

A6. Algoritmus konštrukcie : **os mimobežiek**
Dané: *a* , *b* - mimobežky

A6: 1. $\rho \perp a$, $\sigma \perp b$
2. $\rho \cap \sigma = k$
3. k existuje a k X $a \wedge k$ X $b \Rightarrow k$ – os

Príklad : V kocke *ABCDA'B'C'D'* zostrojiť os mimobežiek a = *BD'*, b=*B'C*.