Plochy generované triedami geometrických transformácií

Matematické reprezentácie plôch

Implicitné vyjadrenie plochy Φ:

$$F(x,y,z)=0,$$

kde premenné *x, y, z* sa interpretujú ako súradnice bodu plochy. Táto rovnica umožňuje zistiť, či bod $A=\left[x^A, y^A, z^A\right]$ je bodom plochy.

Explicitné vyjadrenie plochy Φ :

$$z=f(x,y)$$

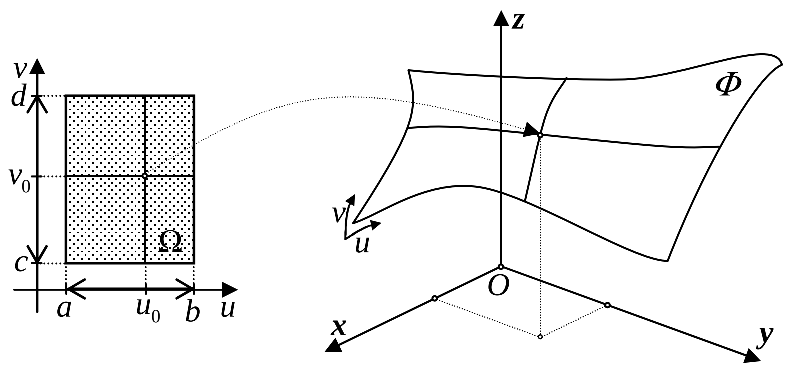
Podľa ktorého určíme hodnotu *z* bodu plochy Φ zo súradníc *x, y* .

Parametrické vyjadrenie plochy Φ je určené pomocou bodovej funkcie dvoch premenných *u* , *v* (premenné *u, v* nazývame tiež *u, v* parametre plochy) :

$$x=x(u,v)$$
$$y=y(u,v),\quad u,v\in U\times V$$
$$z=z(u,v)$$

Plocha je súvislá podmnožina $\Phi \subset E^3$, ktorá je hladkým obrazom oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\Omega=U\times V$ kde $U=\langle a,b\rangle$ a $V=\langle c,d\rangle$ sú číselné intervaly.

Funkcie $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ nazývame ***parametrické rovnice plochy***.



- $u=u_0\in U,$:

$$x=x(u_0,v),\ y=y(u_0,v),\ z=z(u_0,v),\quad u=u_0, v\in V.$$

v – čiara plochy. V ďalšom texte použijeme častejšie rovnice:

$$x=x(v),\ y=y(v),\ z=z(v),\quad v\in V.$$

-$v=v_0\in V$

$$x=x(u,v_0),\ y=y(u,v_0),\ z=z(u,v_0),\quad u\in U, v=v_0.$$

u - čiara plochy, zápis:

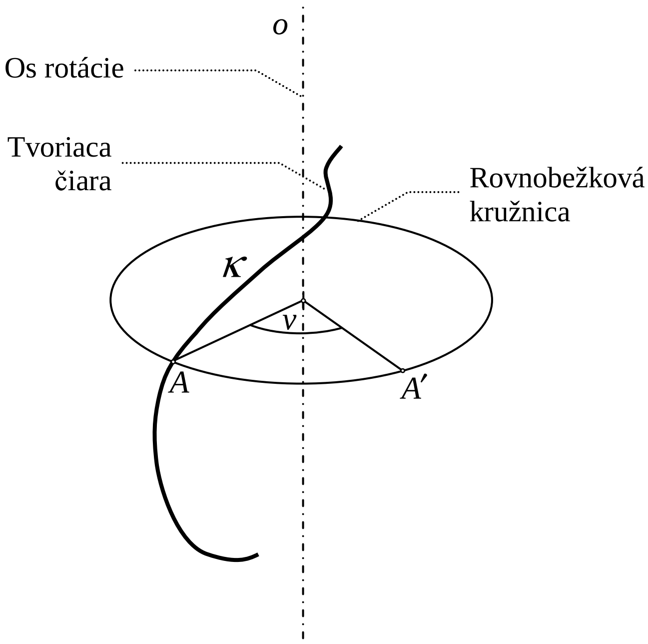
$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u),\quad u\in U.$$

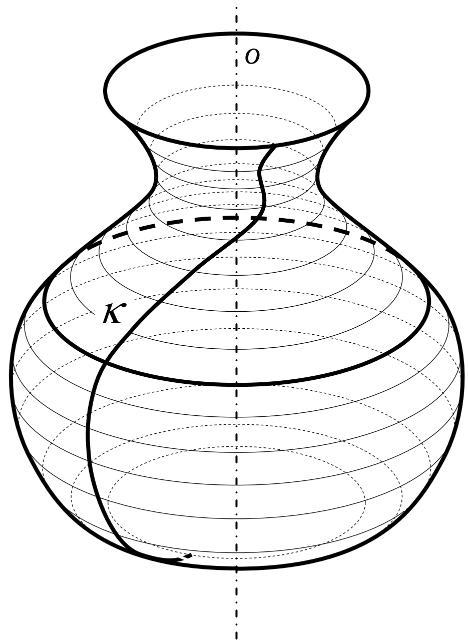
Tento prístup v opise plôch zúžime na technické plochy, ktoré sú vytvorené aplikáciou vybranej triedy geometrickej transformácie. Zameriame sa na parametrické vyjadrenie vytvorených plôch.

Rotačné plochy

Syntetický prístup

Daná je čiara κ, priamka o, pričom čiara κ neleží v rovine kolmej na priamku o. Plocha Φ vytvorená rotáciou čiary κ okolo priamky o o uhol $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ sa nazýva ***rotačná plocha***, priamka o ***os rotácie*** a čiara κ ***tvoriaca čiara plochy***. Každý bod $A \notin o$ čiary κ vytvorí ***rovnobežkovú kružnicu***, ktorá leží v rovine kolmej na priamku o.





Analytická metóda

Nech $Oxyz$ je pravouhlý trojhran v priestore E^3 a os rotácie o je totožná so súradnicovou osou z. Čiara κ je u -krivka t.j. má parametrické vyjadrenie

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \qquad u \in U\,.$$

Rotácia okolo osi z o uhol $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je vlastne triedou rotácií a to zt -otočenia okolo súradnicovej osi z o uhol $t.\theta_z$

$$\mathbf{R}_z\left(t.\theta_z\right) = \begin{pmatrix} \cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

t.j. položíme $v = t.\theta_z$ a môžeme zapísať analytické vyjadrenie rotačnej plochy v homogénnych súradniciach:

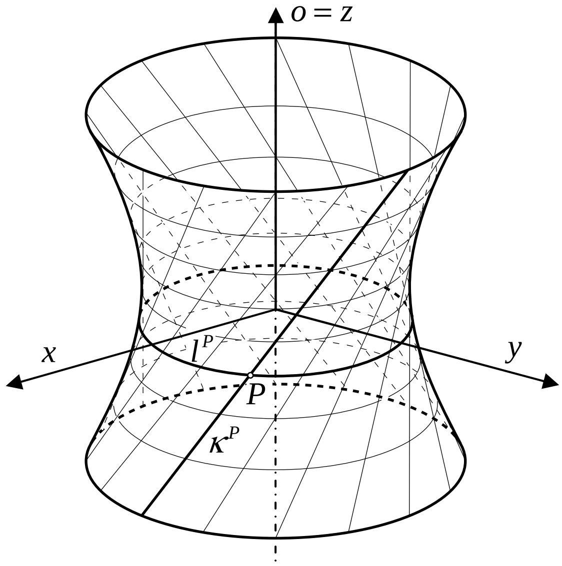
$$\begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) & y(u) & z(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$u \in U$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Teda ***parametrické rovnice rotačnej plochy*** sú:

$$x(u,v) = x(u)\cos v - y(u)\sin v$$
$$y(u,v) = x(u)\sin v + y(u)\cos v$$
$$z(u,v) = z(u) \text{ , kde } u \in U \text{ , } v \in \langle 0, 2\pi \rangle .$$

Sieť čiar na rotačnej ploche tvoria u - čiary, ktoré sú zhodné s tvoriacou čiarou κ (t.j. u -čiary nemenia tvar len polohu v priestore) a v -čiary, ktoré sú rovnobežkové kružnice ležiace v rovinách kolmých na os rotácie o. Každým bodom P rotačnej plochy prechádza práve jedna u -čiara κ^P a v -čiara je rovnobežková kružnica l^P. Pri grafickej ilustrácii plôch sú vykreslené sústavy u-, v- čiar. Problém viditeľnosti pri vykresľovaní čiar nie je zaradený.

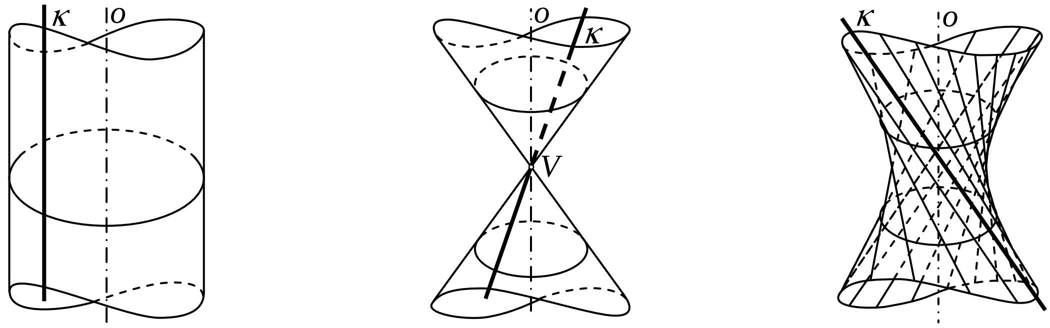


Klasifikácia rotačných plôch podľa tvoriacej čiary

Priamkové rotačné plochy

Tvoriaca čiara κ je ***priamka p***. Podľa vzájomnej polohy priamky p a osi o dostaneme plochy:

- p, o sú rovnobežky: ***rotačná valcová plocha***
- p, o sú rôznobežky: ***rotačná kužeľová plocha***
- p, o sú mimobežky: ***jednodielny hyperboloid***



Príklad : Nech priamka p = AB, kde A(a,0,0) B(0,0,b). Napíšte parametrické rovnice rotačnej plochy pre tvoriacu čiaru priamku p.
Riešenie: Parametrické vyjadrenie tvoriacej u -čiary:

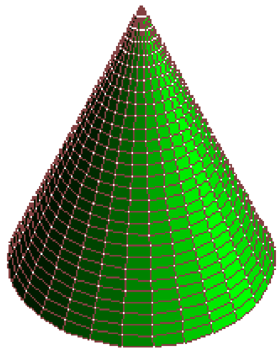
$$x(u) = a(1-u)\,,\; y(u) = 0\;\;,\;\; z(u) = bu\,,\;\; a \neq 0, b, u \in R$$

Parametrické rovnice plochy: $x(u,v) = a(1-u)\cos v$

$$y(u,v) = a(1-u)\sin v$$

$$z(u,v) = bu \quad a \neq 0, b, u \in R \;\; v \in \left\langle 0, 2\pi \right\rangle$$

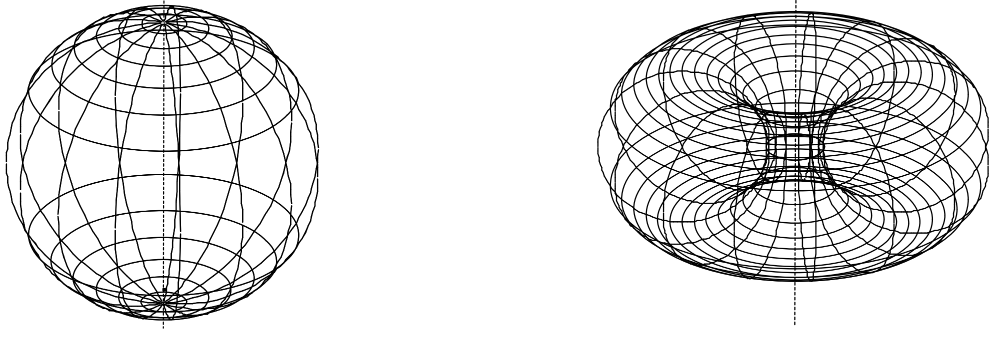
Ak $u \in \left\langle 0,1 \right\rangle$, tak tvoriaca čiara je úsečka AB a plocha je rotačný kužeľ napr. pre a = 2j, b = 4j.



Cyklické rotačné plochy

Tvoriaca čiara κ je kružnica so stredom v bode S a polomerom r, ktorá leží v rovine incidujúcej s osou rotácie. Na základe vzájomnej polohy tvoriacej kružnice a osi o určíme:

- $S \in o$: ***guľová plocha***
- $S \notin o$: ***anuloid***



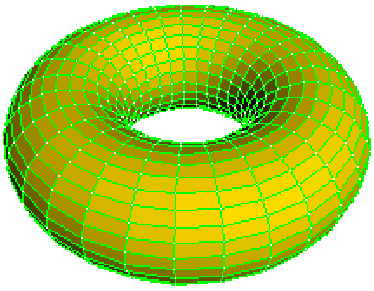
Príklad : Nech kružnica κ má parametrické rovnice :

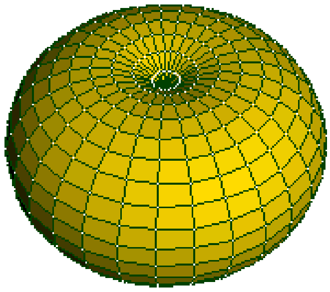
$$x(u) = r\cos u + a\,,\ y(u) = 0\,,\ z(u) = r\sin u\,,\ u \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0\,.$$

Parametrické rovnice anuloidu:

$$x(u,v) = (r\cos u + a)\cos v$$
$$y(u,v) = (r\sin u + a)\sin v$$
$$z(u,v) = r\sin u \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle\ v \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Napr. pre $r = 1j$, $a = 2j$; $r = 1j$, $a = 0.5j$

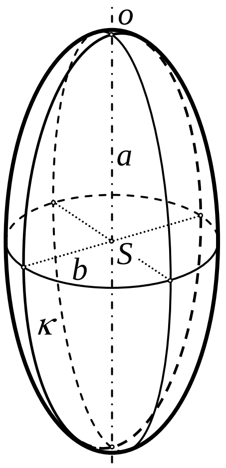


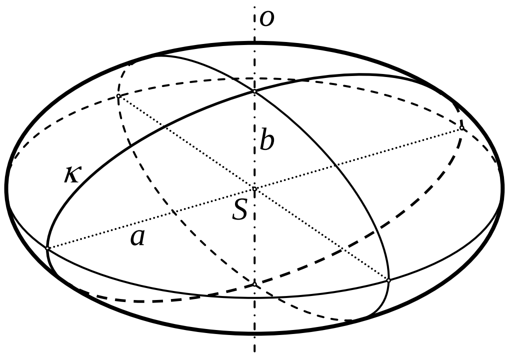


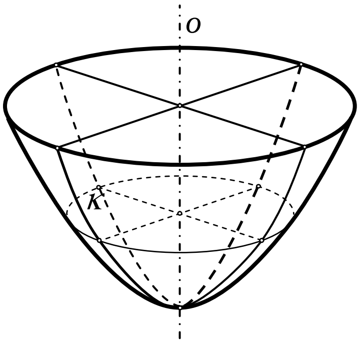
• kružnica κ neleží v priemerovej rovine: ***globoid***

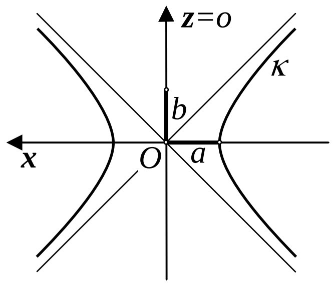
Kvadratické rotačné plochy

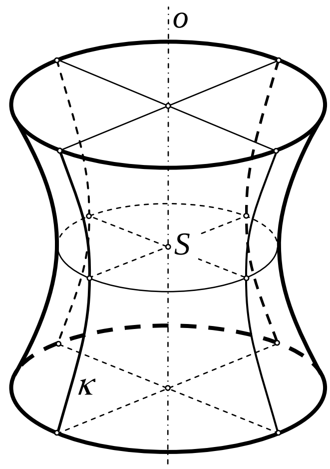
Tvoriaca čiara κ je regulárna kužeľosečka a podľa typu kužeľosečky vznikne rotačná plocha:
• elipsa : ***rotačný elipsoid***
• parabola : ***rotačný paraboloid***
• hyperbola : ***rotačný hyperboloid 1-dielny*** (os rotácie je totožná s vedľajšou osou hyperboly)
• hyperbola : ***rotačný hyperboloid 2-dielny*** (os rotácie je totožná s hlavnou osou hyperboly)

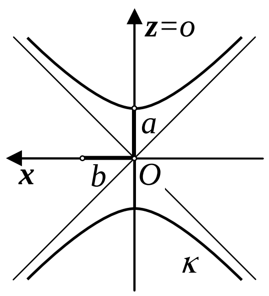


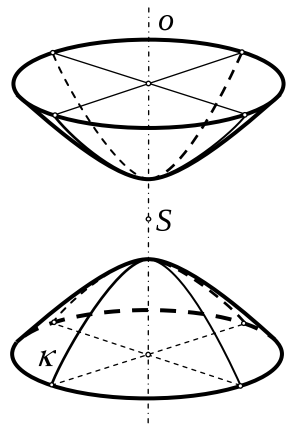










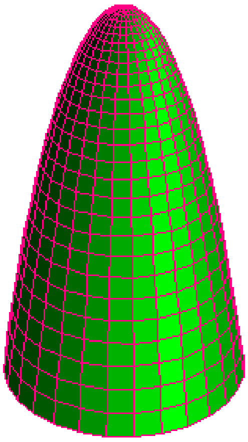


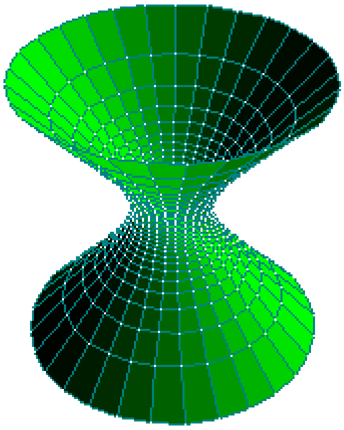
Príklad : Parametrické rovnice u – krivky, incidujúcej so súradnicovou rovinou xz :

- elipsa: $x(u) = a\cos u, y(u) = 0, z(u) = b\sin u, u \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- parabola : $x(u) = u, y(u) = 0, z(u) = b\dfrac{u^2}{a^2}, u \in \langle -a, a \rangle$
- parabola : $x(u) = u, y(u) = 0, z(u) = b(1 - \dfrac{u^2}{a^2}), u \in \langle -a, a \rangle$
- hyperbola : $x(u) = \dfrac{a}{\cos u}, y(u) = 0, z(u) = b\tan u, u \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} \right), a, b \neq 0$
- hyperbola : $x(u) = b\tan u, y(u) = 0, z(u) = \dfrac{a}{\cos u}, u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right), a, b \neq 0$

Napr. • parabola : $x(u) = u, y(u) = 0, z(u) = 3(1 - u^2)/4, u \in \langle 0, 1 \rangle$

• hyperbola : $x(u) = \dfrac{1}{\cos u}, y(u) = 0, z(u) = 1\tan u, u \in \langle -1.3, 1.3 \rangle$





Všeobecné rotačné plochy

Tvoriaca čiara κ je funkciou parametra *u*, t.j. poznáme parametrické rovnice tvoriacej čiary:

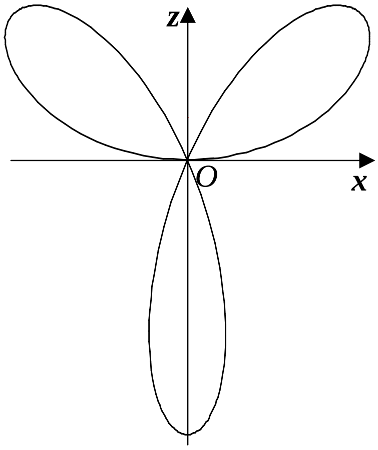
$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \qquad u \in U$$

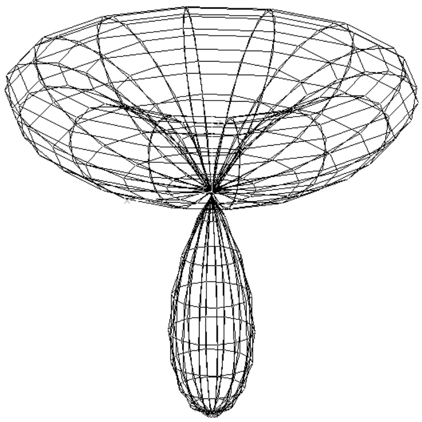
Príklady: uvedené sú parametrické rovnice tvoriacej čiary a rotačnej plochy:

Ruža

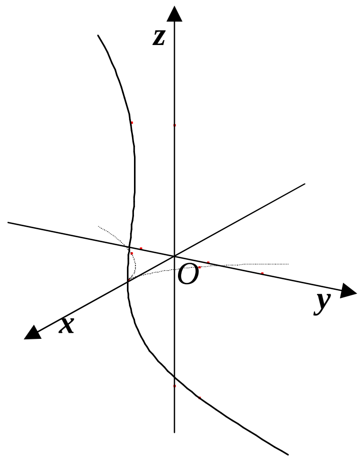
$$x(u) = 2*\sin(3*u)*\cos(u)$$
$$y(u) = 0 \quad ,$$
$$z(u) = 2*\sin(3*u)*\sin(u)$$
$$u \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$x(u,v) = a.\sin bu.\cos u.\cos v$$
$$y(u,v) = a.\sin bu.\cos u.\sin v \ ,$$
$$z(u,v) = a.\sin bu.\sin u$$
$$a, b \in \mathbb{R}, u, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

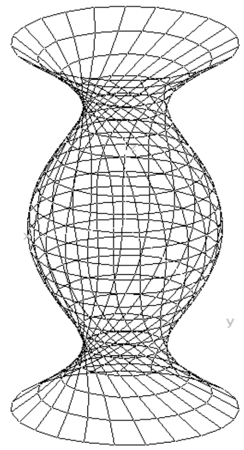




$$x(u)=\cos(u)$$
$$y(u)=\sin(u)-u\,,$$
$$z(u)=u$$
$$u\in\langle -2,2\rangle$$



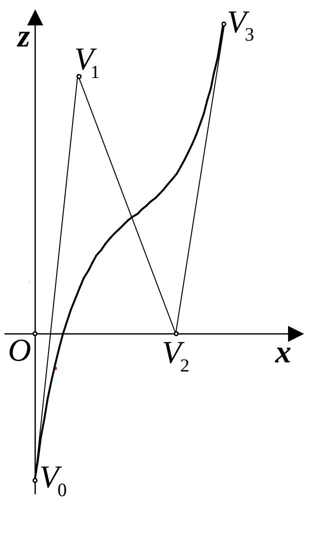
$$x(u,v)=\cos u\cos v-(\sin u-u)\sin v$$
$$y(u,v)=\cos u\sin v+(\sin u-u)\cos v\,,$$
$$z(u,v)=u$$
$$u\in\mathbb{R}, v\in\langle 0,2\pi\rangle$$



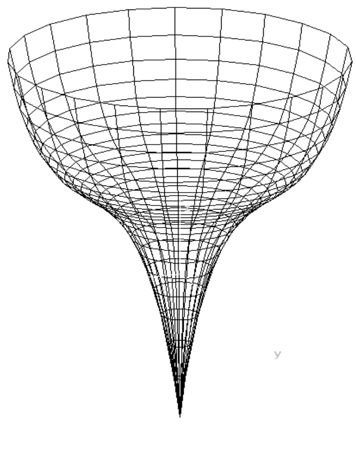
Bèzierova kubická krivka

Určujúci polygón tvoria vrcholy:

$$V_0=[0,-4], V_1=[1,5], V_2=[3,0], V_3=[4,6]$$
$$x(u)=-2*u\wedge 3+3*u\wedge 2+3*u$$
$$y(u)=0$$
$$z(u)=25*u\wedge 3-42*u\wedge 2+27*u-4$$
$$u\in\langle 0,1\rangle$$



$$x(u,v)=\left(-2u^3+3u^2+3u\right)\cos v$$
$$y(u,v)=\left(-2u^3+3u^2+3u\right)\sin v$$
$$z(u,v)=25u^3-42u^2+27u-4$$
$$u\in\mathbb{R}, v\in\langle 0,2\pi\rangle$$

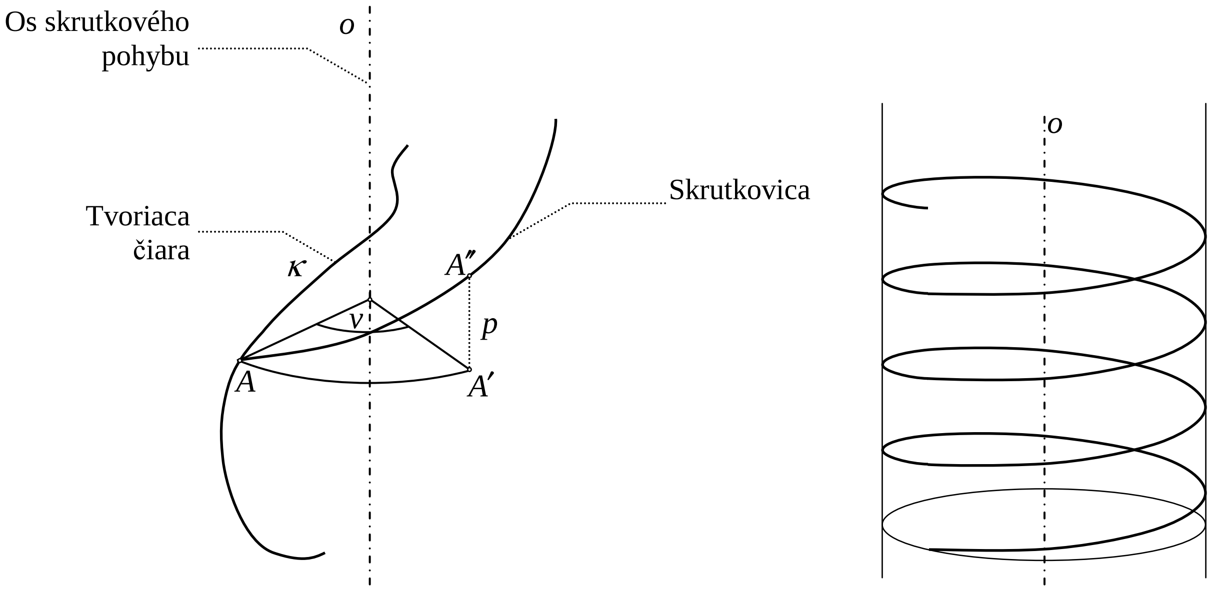


Literatúra:
Tisoň, M.: Rotačné plochy, FMFI UK diplomová práca, Bratislava 2006
Macková, Zaťková: Riešenie základných úloh z deskriptívnej geometrie pomocou počítača, SVŠT Bratislava,1985

Skrutkové plochy

Syntetický prístup

Daná je čiara κ, priamka *o*, pričom čiara κ nie je časťou priamky rovnobežnej s priamkou *o*. Plocha Φ vytvorená skrutkovým pohybom čiary κ vzhľadom na priamku *o* sa nazýva ***skrutková plocha***. Priamku *o* nazývame ***os skrutkového pohybu*** a čiaru κ ***tvoriaca čiara plochy***. Každý bod $A \notin o$ čiary κ vytvorí ***skrutkovicu***.



V tomto texte pracujeme so skrutkovicou, pre ktorú je skrutkový pohyb určený zložením triedy otočení okolo osi *o* a triedy posunutí rovnobežne s osou otočenia .

Analytická metóda

Nech *Oxyz* je pravouhlý trojhran v priestore E^3 a os skrutkového pohybu *o* je totožná so súradnicovou osou *z*. Čiara κ je *u* -krivka s parametrickým vyjadrením :

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \qquad u \in U\ .$$

Trieda skrutkového pohybu s osou na súradnicovej osi *z*

$$\mathbf{SP}_z\left(t.\theta_z\right) = \begin{pmatrix} \cos t.\theta_z & \sin t.\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin t.\theta_z & \cos t.\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t.n & 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Pre túto voľbu parametra *t* je určený jeden závit skrutkovice. Položme $v = t.\theta_z$, potom analytické vyjadrenie rotačnej plochy v homogénnych súradniciach:

$$\begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) & y(u) & z(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p.v & 1 \end{pmatrix}$$

$u \in U$, $v \in \left(-\infty, \infty\right)$, *p*- parameter skrutkového pohybu, $p \in R$, $p > 0$, *n* – výška závitu skrutkového pohybu je dĺžkou posunutia prislúchajúceho otočeniu o uhol 2π t.j. $n = 2\pi p$.

Parametrické rovnice skrutkovej plochy :

$$x(u,v) = x(u)\cos v - y(u)\sin v$$
$$y(u,v) = x(u)\sin v + y(u)\cos v$$
$$z(u,v) = z(u) + p.v \text{ , kde } u \in U \text{ , } v \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ , } p > 0 \text{ .}$$

Sieť čiar na skrutkovej ploche tvoria u -čiary, ktoré sú zhodné s tvoriacou čiarou κ, v -čiary, sú skrutkovice. Ak parameter $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$, tak je určený jeden závit skrutkovice a teda aj skrutkovej plochy. Počet závitov skrutkovej plochy sa určuje zadaním z intervalu parametra $v \in (-\infty, \infty)$ t.j. sú to násobky intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pri grafickej ilustrácii skrutkovej plochy sú vykresľované sústavy u -čiar a v -čiar.

Klasifikácia skrutkových plôch podľa tvoriacej čiary

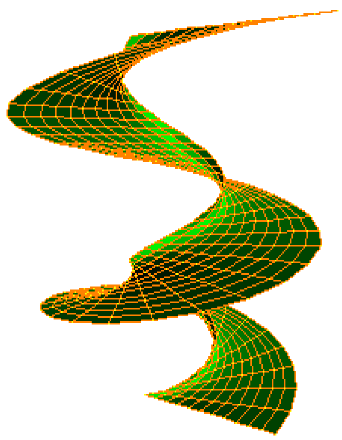
Priamkové skrutkové plochy

Tvoriaca čiara κ je ***priamka p***. Podľa vzájomnej polohy priamky p a osi o dostaneme plochy:

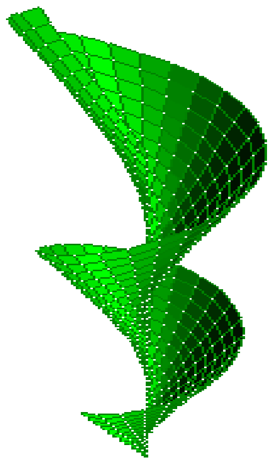
- *p*, *o* sú mimobežky: ***otvorená skrutková plocha***
- *p*, *o* sú rôznobežky: ***uzavretá skrutková plocha***
- *p*, *o* sú kolmé priamky: ***ortogonálna skrutková plocha***
- *p*, *o* nie sú kolmé priamky: ***klinogonálna skrutková plocha***

Teda môžeme určiť ***priamkové skrutkové plochy***:

- ***otvorené ortogonálne***
- ***otvorené klinogonálne***
- ***uzavreté ortogonálne***
- ***uzavreté klinogonálne***



otvorená ortogonálna



uzavretá klinogonálna

Využitie priamkových skrutkových plôch je v stavebníctve .

Príklad : Napíšte parametrické rovnice uzavretej ortogonálnej skrutkovej plochy.

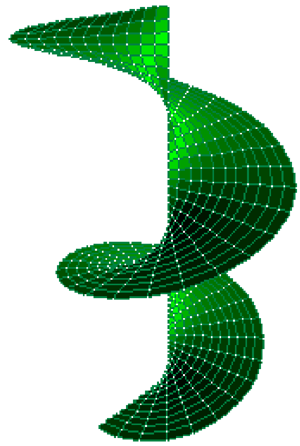
Riešenie: Priamky p, o sú rôznobežky a sú kolmé. Napr. priamka $p = AB$, $A(a,0,0)$ $B(b,0,0)$.
Parametrické vyjadrenie tvoriacej u -čiary:

$$x(u) = a - bu\,,\; y(u) = 0\,,\; z(u) = 0\,,\; u \in \langle 0,1 \rangle$$

Parametrické rovnice plochy:

$$x(u,v) = (a - bu)\cos v$$
$$y(u,v) = (a - bu)\sin v$$
$$z(u,v) = p.v \quad u \in \langle 0,1 \rangle\; v \in (-\infty, \infty)$$

Napr. $a = 5j$, $b = 0j$ $v \in \langle 0, 4\pi \rangle$:



Cyklické skrutkové plochy

Tvoriaca čiara κ je ***kružnica***. Na základe vzájomnej polohy tvoriacej kružnice a osi o určíme:

- tvoriaca kružnica leží v rovine kolmej na os skrutkového pohybu: ***vinutý stĺpik***
- tvoriaca kružnica leží v rovine incidujúcej s osou skrutkového pohybu: ***plocha pletenca***

Tieto cyklické skrutkové plochy sa používajú najmä v architektúre ako ozdobný prvok.
V stavebníctve sa používajú pri žľaboch na dopravu rôzneho materiálu alebo ako klenby nad točitým schodišťom.

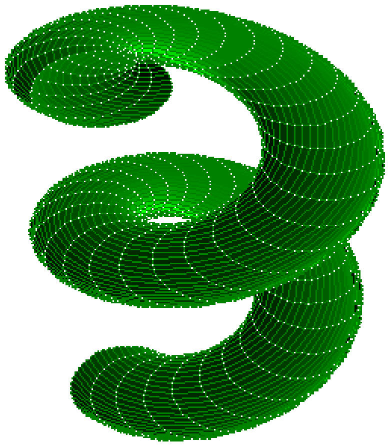
Príklad : Nech kružnica má parametrické rovnice

$$x(u) = r\cos u + a\,,\; y(u) = 0\,,\; z(u) = r\sin u\,,\; u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Parametrické rovnice cyklickej skrutkovej plochy:

$$x(u,v) = (r\cos u + a)\cos v$$
$$y(u,v) = (r\cos u + a)\sin v$$
$$z(u,v) = r\sin u + p.v\,,\; u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in (-\infty, \infty)$$

Napr. $a = 2j$, $r = 1j$, $v \in \langle 0, 4\pi \rangle$:



Všeobecné skrutkové plochy

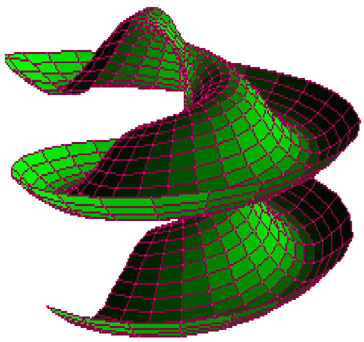
Tvoriaca čiara κ je krivka v rovine alebo v priestore, pričom poznáme jej parametrické rovnice:

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \qquad u \in U$$

Parametrické rovnice skrutkovej plochy :

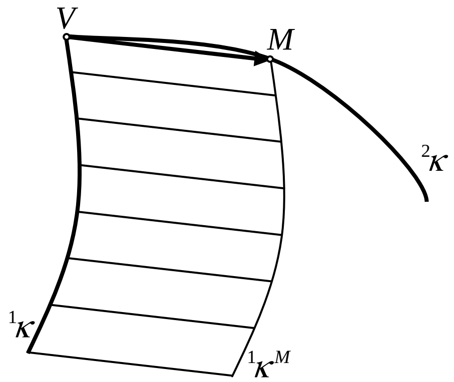
$$x(u,v) = x(u)\cos v - y(u)\sin v$$
$$y(u,v) = x(u)\sin v + y(u)\cos v$$
$$z(u,v) = z(u) + p.v \text{ , kde } u \in U\text{ , } v \in \langle 0, 2\pi \rangle, p > 0 \text{ .}$$

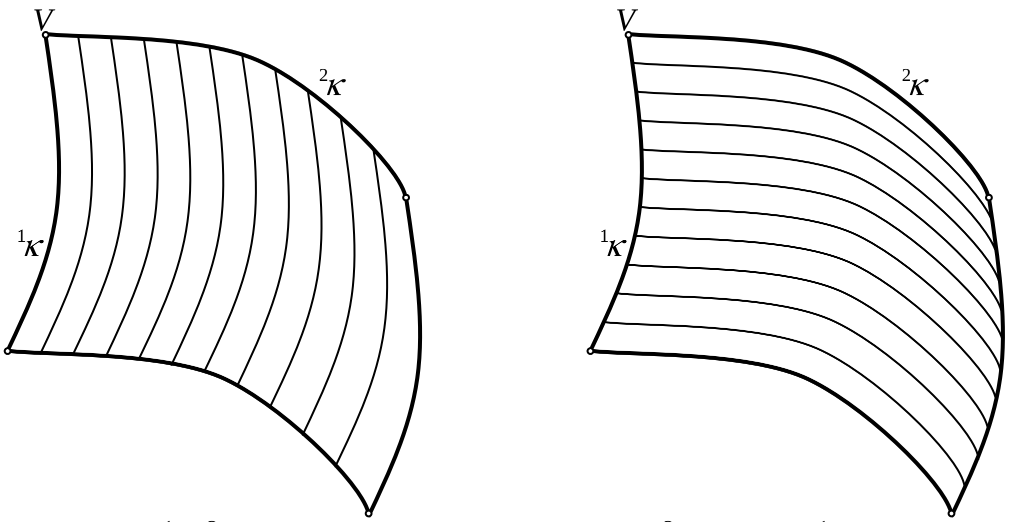
Napr. Tvoriaca čiara κ: $x(u) = u \qquad y(u) = 0 \qquad z(u) = \sin u \qquad u \in \langle 0, 2\pi \rangle$



<u>Translačné plochy</u>

Syntetický prístup
Dané sú čiary ${}^1\kappa$; ${}^2\kappa$ so spoločným bodom *V*, ktoré neležia v jednej rovine. Nech $M \neq V$ je ľubovoľný bod čiary ${}^2\kappa$, potom existuje posunutie $\tau: V \to M$. Pri translácii τ sa čiara ${}^1\kappa$ posunie do čiary ${}^1\kappa^M$. Ak za bod M volíme postupne body čiary ${}^2\kappa$, tak čiary ${}^1\kappa^M$ vytvoria plochu, ktorú nazývame ***translačná plocha*** .





Ak vymeníme čiary ${}^1\kappa$; ${}^2\kappa$ navzájom, teda posúvame čiaru ${}^2\kappa$ po čiare ${}^1\kappa$; dostaneme tú istú plochu. Na ploche určíme dve sústavy čiar, ktoré sú zhodné s čiarou ${}^1\kappa$; resp. ${}^2\kappa$. Čiary ${}^1\kappa$; ${}^2\kappa$ nazývame ***tvoriace čiary*** translačnej plochy.

Analytická metóda
Nech *Oxyz* je pravouhlý trojhran v priestore E^3. Nech čiara ${}^1\kappa$ je *u* -krivka s parametrickým vyjadrením: $x = {}^1x(u),\quad y = {}^1y(u),\quad z = {}^1z(u),\ u \in U$ a čiara ${}^2\kappa$ je *v* –krivka s parametrickým vyjadrením: $x = {}^2x(v),\quad y = {}^2y(v),\quad z = {}^2z(v),\ v \in V$. Bod $V(x^V, y^V, z^V)$ je spoločným bodom oboch čiar t.j. pre konkrétnu hodnotu parametrov *u*, *v* platí :

$$x^V = {}^1x(u) = {}^2x(v) \qquad y^V = {}^1y(u) = {}^2y(v) \qquad z^V = {}^1z(u) = {}^2z(v)$$

Translačnú plochu určíme pomocou čiary ${}^1\kappa$, na ktorú aplikujeme triedu translácií. Táto trieda translácií je určená čiarou ${}^2\kappa$ a bodom *V*, presnejšie vektorom

$$VM = M - V = \left({}^2x(v) - x^V, {}^2y(v) - y^V, {}^2z(v) - z^V\right)$$

Trieda translácií

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ {}^2x(v)-x^V & {}^2y(v)-y^V & {}^2z(v)-z^V & 1 \end{pmatrix}$$

Analytické vyjadrenie translačnej plochy v homogénnych súradniciach:

$$\begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1x(u) & {}^1y(u) & {}^1z(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ {}^2x(v)-x^V & {}^2y(v)-y^V & {}^2z(v)-z^V & 1 \end{pmatrix}$$

Parametrické rovnice translačnej plochy :

$$x(u,v) = {}^1x(u) + {}^2x(v) - x^V$$
$$y(u,v) = {}^1y(u) + {}^2y(v) - y^V$$
$$z(u,v) = {}^1z(u) + {}^2z(v) - z^V,\ u \in U, v \in V$$

Sústava u -čiar resp. v -čiar na translačnej ploche sú zhodné čiary s tvoriacou čiarou ${}^1\kappa$, resp. ${}^2\kappa$.

Typy translačných plôch

- Ak jedna tvoriaca čiara je priamka, tak valcové plochy sú translačné.
- Cyklickú skrutkovú plochu môžeme vyšetrovať ako translačnú plochu.
- Ak sú čiary ${}^1\kappa$; ${}^2\kappa$ kužeľosečky, nazývame k nim odpovedajúcu translačnú plochu kužeľosečko- kužeľosečková plocha. Podľa typu kužeľosečky sa názvy translačných plôch upresňujú:
    - kružnicovo – kružnicová
    - kružnicovo – parabolická
    - parabolicko – parabolická

Pri parabolicko – parabolickej ploche môžeme vygenerovať viac známych translačných plôch. Ich konštrukcia je ilustrovaná v príklade.

Príklad: Nech čiara ${}^1\kappa$ je parabola v súradnicovej rovine xz :

$${}^1x(u) = u,\ {}^1y(u) = 0,\ {}^1z(u) = ku^2, u \in \langle -a, a \rangle$$

A čiara ${}^2\kappa$ je parabola v súradnicovej rovine yz :

$${}^2x(v) = 0,\ {}^2y(v) = v,\ {}^2z(v) = lv^2, v \in \langle -b, b \rangle$$

Bod $V = {}^1\kappa \cap {}^2\kappa$ má súradnice (0,0,0).
Parametrické rovnice translačnej plochy :

$$x(u,v) = u$$
$$y(u,v) = v$$
$$z(u,v) = ku^2 + lv^2, u \in \langle -a, a \rangle, v \in \langle -b, b \rangle.$$

Typ translačnej plochy bude určený hodnotami koeficientov k, l t.j. či paraboly ${}^1\kappa$; ${}^2\kappa$ ležia v tom istom polpriestore alebo v opačných polpriestoroch ohraničených súradnicovou rovinou xy :

- $k = l$: ***rotačný paraboloid*** (translačná plocha)

- $k \neq l$, sgn k = sgn l : ***eliptický paraboloid***
- $k = 0$, $l \neq 0$: ***parabolický valec***
- $k > 0$, $l < 0$: ***hyperbolický paraboloid***

Napr. $k = 1j$, $l = 1j$, $u \in \langle -1,1 \rangle, v \in \langle -1,1 \rangle$

$k = 0$, $l = 1j$, $u \in \langle -1,1 \rangle, v \in \langle -1,1 \rangle$

$k = 1j$, $l = \text{-}1j$, $u \in \langle -1,1 \rangle, v \in \langle -1,1 \rangle$