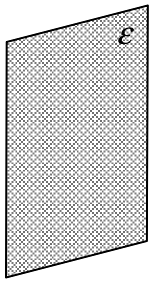
PREMIETANIE

Proces vizualizácie útvarov *U* trojrozmerného priestoru v dvojrozmernej rovine (výkres, monitor počítača, tlačiareň) sa získa postupnosťou operácií. K zobrazovaniu útvarov využívame premietanie

- stredové
- rovnobežné

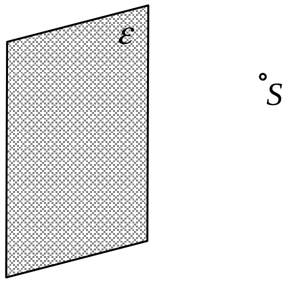
Najdôležitejším prvkom premietania je

priemetňa $\boldsymbol{\varepsilon}$ - rovina, do ktorej premietame (v špeciálnych prípadoch priemetňou môže byť valcová resp. guľová plocha)

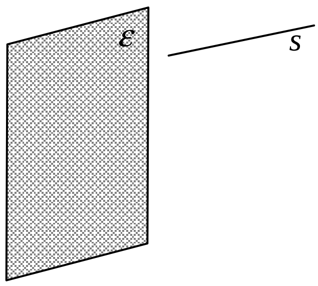


Pri stredovom premietaní je dôležitý

stred premietania *S* : bod, z ktorého premietame do priemetne ε a stred *S* neleží v priemetni ε



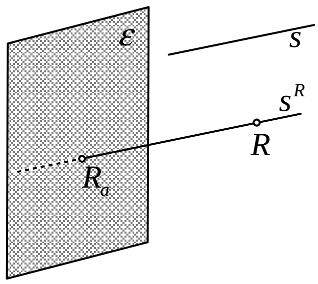
V rovnobežnom premietaní úlohu stredu *S* preberá ***osnova priamok*** $\{s\}$: priamka *s* je rôznobežná s priemetňou ε



Rovnobežné premietanie

Syntetický prístup

Nech ε je rovina priestoru E^3 a $\{s\}$ je osnova priamok rôznobežná s rovinou ε. Zobrazenie $f: E^3 \to \varepsilon$, ktoré bodu $R \in E^3$ priradí priesečník priamky $s^R (R \in s^R, s^R \in \{s\})$ s rovinou $\varepsilon: R_a = s^R \cap \varepsilon$, nazývame ***rovnobežné premietanie v smere priamky s do roviny ε.***



Priamku s^R nazývame

premietacia priamka bodu R.

Priesečník premietacej priamky bodu s priemetňou ε nazývame

rovnobežný priemet bodu

Množinu rovnobežných priemetov všetkých bodov geometrického útvaru *U* nazývame

rovnobežný priemet U_a útvaruU

Množinu bodov premietacích priamok všetkých bodov útvaru *U* nazývame

premietacím útvarom daného útvaru

Hranicu rovnobežného priemetu objektu *U* nazývame

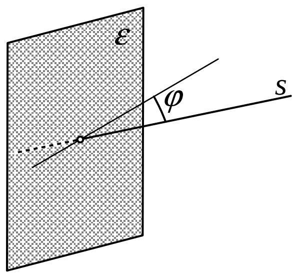
obrys priemetu objektu (zdanlivý obrys)

Prienik objektu *U* a hranice premietacieho útvaru objektu *U* nazývame

obrys objektu U (skutočný obrys)

Odchýlku priamky *s* a priemetne ε označíme $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon$ a nazývame

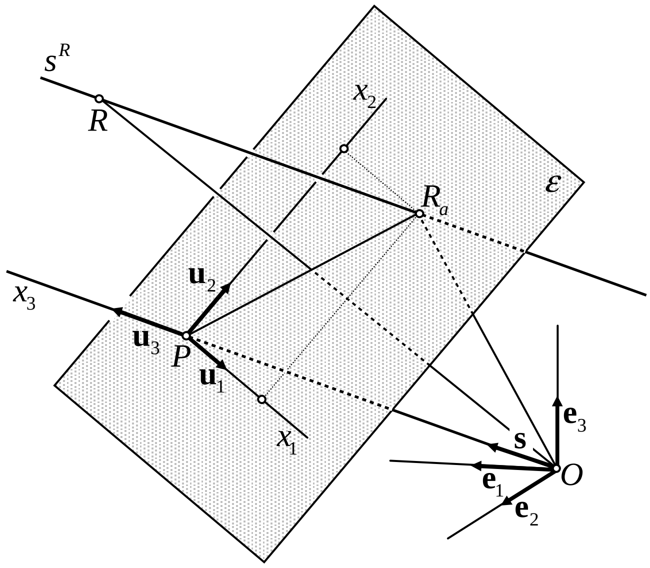
uhol premietania



Ak uhol φ je ostrý hovoríme o ***šikmom (kosouhlom) premietaní*** ak uhol φ je pravý, tak hovoríme o ***kolmom (pravouhlom) premietaní***. Šikmé premietanie (uhol φ=63.4°) je známe v pedagogickom procese ako ***metóda voľného rovnobežného premietania***. Využíva sa na zobrazovanie rovnobežných priemetov základných geometrických telies. V tejto metóde nepracujeme so súradnicovými sústavami.

Analytický prístup

V priestore E^3 je afinná súradnicová sústava $\langle O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$. Nech $\langle P,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$ je nová afinná súradnicová sústava, kde $\langle P,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$ je súradnicová sústava priemetne ε. Priamka *s* je určená smerovým vektorom $\mathbf{s}(s^x, s^y, s^z)$, tzv. smer premietania ***s***. Smer ***s*** a vektor $\mathbf{u}_3$ patria do tej istej osnovy, ale sú opačne orientované.



Nech *R* je bod priestoru E^3 teda má afinné súradnice (x^R, y^R, z^R). Rovnobežný priemet bodu *R* je priesečník premietacej priamky $s^R \in \{s\}$ s priemetňou ε: $R_a = s^R \cap \varepsilon$.
Vyjadríme súradnice bodu R_a vzhľadom na súradnicovú sústavu $\langle P,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$.

Platí: $$R_a = P + x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \qquad (1)$$
$$R_a = R + x_3\mathbf{s} = R - x_3\mathbf{u}_3 \qquad (2)$$
kde čísla x_1, x_2, x_3 sú afinné súradnice bodu R_a v súradnicovej sústave $\langle P,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$.
Z vyjadrení (1) a (2) získame vektorovú rovnicu :
$$R - P = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 \qquad (3)$$
a neznáme čísla x_1, x_2, x_3 určíme postupne:

1. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)$ a využijeme známe rovnosti pre zmiešaný súčin vektorov $\mathbf{u}_2\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3) = 0$:
$$(R-P)\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3) = x_1\mathbf{u}_1\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)$$
a vyčíslime: $$x_1 = \frac{(R-P)\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)}{\mathbf{u}_1\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)} = \frac{(R-P)\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)}{\mathbf{u}_3\cdot(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)} \qquad (4)$$
2. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $(\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_1)$ a vyčíslime :
$$x_2 = \frac{(R-P)\cdot(\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_1)}{\mathbf{u}_3\cdot(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)} \qquad (5)$$
3. skalárne vynásobíme rovnicu (3) vektorom $(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)$ a vyčíslime

$$x_3 = \frac{(R-P)\cdot(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)} \tag{6}$$

Vyčíslené hodnoty (4), (5) sú súradnice x_1, x_2 rovnobežného priemetu R_a bodu R v sústave súradníc priemetne ε. Hodnota x_3 vyjadruje polohu bodu na premietacej priamke, ktorá sa výhodne využíva v algoritmoch viditeľnosti / literatúra/.

Kolmé premietanie

Smer premietania $\mathbf{s}$ je kolmý na priemetňu ε t.j. vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ($\mathbf{u}_3 = \mathbf{s}$) vytvárajú ortonormálnu bázu a vyjadrenia (4), (5), (6) upravíme:

$$\begin{aligned} x_1 &= (R-P)\cdot\mathbf{u}_1 \\ x_2 &= (R-P)\cdot\mathbf{u}_2 \\ x_3 &= (R-P)\cdot\mathbf{u}_3 \end{aligned} \tag{7}$$

Čísla x_1, x_2 sú súradnice kolmého priemetu R_a bodu R v sústave súradníc priemetne ε. Ďalšiu úpravu zrealizujeme, ak bod P – začiatok súradnicovej sústavy $\langle P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ v rovine ε je totožný s bodom O súradnicovej sústavy $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Vtedy výsledkom (7) je

$$\begin{aligned} x_1 &= (R-O)\cdot\mathbf{u}_1 \\ x_2 &= (R-O)\cdot\mathbf{u}_2 \\ x_3 &= (R-O)\cdot\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

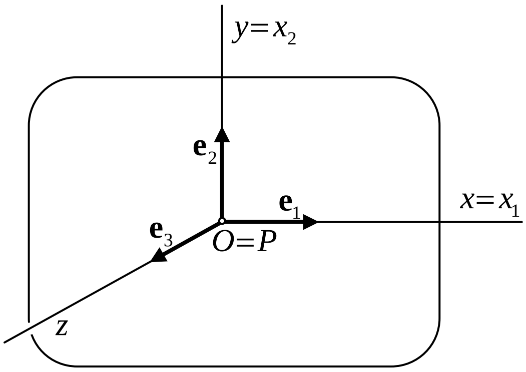
Označme súradnice vektorov $\mathbf{u}_1 = \left(u_1^x, u_1^y, u_1^z\right), \mathbf{u}_2 = \left(u_2^x, u_2^y, u_2^z\right)$, $\mathbf{u}_3 = \left(u_3^x, u_3^y, u_3^z\right)$ potom súradnice x_1, x_2 kolmého priemetu R_a bodu R do priemetne ε zapíšeme

$$\begin{aligned} x_1 &= x^R u_1^x + y^R u_1^y + z^R u_1^z \\ x_2 &= x^R u_2^x + y^R u_2^y + z^R u_2^z \\ x_3 &= x^R u_3^x + y^R u_3^y + z^R u_3^z \end{aligned}$$

Smer premietania, matica rovnobežného premietania

V predchádzajúcom texte sme označili smer premietania $\mathbf{s}$ so súradnicami (s^x, s^y, s^z). Je výhodné vedieť, ako zadávať jednotlivé súradnice, aby sa dosiahlo požadované rovnobežné premietanie, často povedané „ premietanie pod uhlom φ“ t.j. s požadovanou odchýlkou premietacej priamky od priemetne ε.

Za priemetňu rovnobežného premietania ε si zvolíme jednu zo súradnicových rovín sústavy $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Nech je to $\varepsilon = \pi = \langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a túto priemetňu ε stotožníme s nákresňou, ktorou je napr. monitor



V tomto prípade súradnicové osi Ox, Oy sústavy $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ splývajú s osami Px_1, Px_2 priemetne ε. Označili sme, že smer premietania **s** má súradnice (s^x, s^y, s^z) kde $s^z \neq 0$ (rôznobežnosť s priemetňou) a s^x, $s^y > 0$ (výber z 1.oktantu).

Bod $R \in E^3$, $R \notin \varepsilon$, má súradnice $\left(x^R, y^R, z^R\right)$. Parametrické rovnice premietacej priamky s^R :

$$\begin{aligned} x &= x^R + t.s^x \\ y &= y^R + t.s^y \qquad\qquad t \in (-\infty, \infty) \\ z &= z^R + t.s^z \end{aligned}$$

Priesečník premietacej priamky s^R s priemetňou ε určenou rovnicou $z = 0$ vyčíslime:

$0 = z^R + t.s^z$ teda $t = -\dfrac{z^R}{s^z}$ a súradnice bodu v priemetni ε:

$$\begin{aligned} x_1^R &= x^R - \frac{z^R}{s^z} s^x \\ x_2^R &= y^R - \frac{z^R}{s^z} s^y \\ x_3^R &= 0 \end{aligned}$$

Zápis v homogénnych súradniciach (označenie bodu R je vynechané):

$$\begin{aligned} X &= s^z.x - z.s^x \\ Y &= s^z.y - z.s^y \\ Z &= 0 \\ W &= s^z \end{aligned}$$

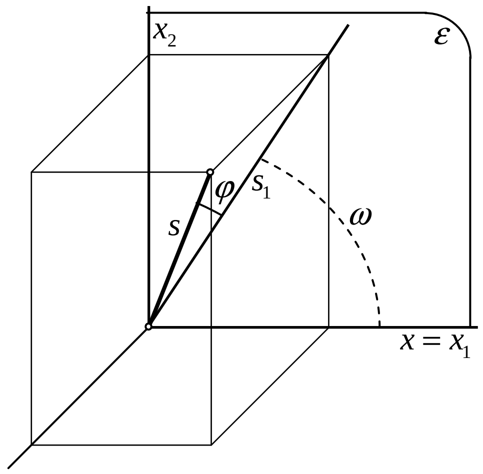
a pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^z & 0 & 0 \\ -s^x & -s^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^z \end{pmatrix}$$

kde matica (4,4) sa označí ako **P**.

Často sa použije $s^z = 1$, potom matica **P** má tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s^x & -s^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

V úvodnom texte sme hovorili o odchýlke $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon$.



Môžeme zapísať:

$s^x = \cot g\varphi . \cos\omega$

$s^y = \cot g\varphi . \sin\omega$

$s^z = 1$, kde $\omega = \measuredangle s_1, x$ a s_1 je kolmý priemet priamky s do priemetne ε a určuje výber premietacej priamky spomedzi všetkých priamok, ktoré s priemetňou ε majú odchýlku φ.

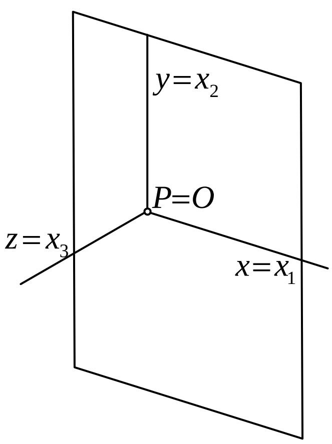
Teraz matica premietania $\mathbf{P}^{\varphi}$ má tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cot g\varphi . \cos\omega & -\cot g\varphi . \sin\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pre pravouhlé premietanie φ = 90° má matica premietania **P** prvky $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rotácie súradnicovej sústavy

Pri zobrazovacích metódach (opísané sú neskôr) priemetňa ε bude mať rôzne polohy vzhľadom na karteziánsku súradnicovú sústavu *Oxyz*. Tieto polohy - priemetne ε - je výhodné popísať pomocou dvoch otáčaní.

Uvažujme základnú polohu sústav *Oxyz* a $Px_1x_2x_3$ t.j. $O = P$ a $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

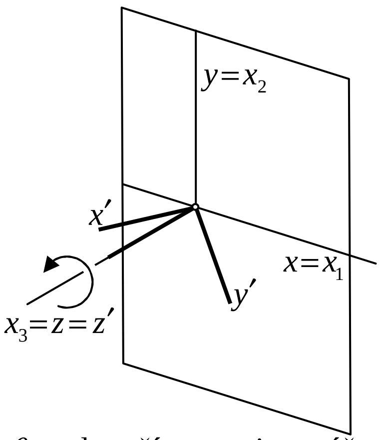


Každú inú polohu sústavy *Oxyz* vzhľadom na základnú polohu určíme pomocou dvoch otočení a to:

1. z-otočenie *Oxyz* o uhol θ_z t.j. využijeme maticu rotácie

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

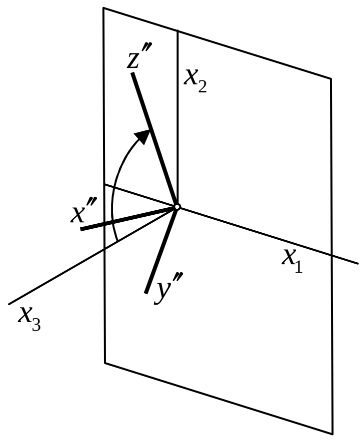
Výsledok: $Ox'y'z'$



2. x-otočenie $Ox'y'z'$ o uhol $-\theta_x$, teda určíme maticu otáčania

$$\mathbf{R}_x(-\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta_x) & \sin(-\theta_x) & 0 \\ 0 & -\sin(-\theta_x) & \cos(-\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $Ox''y''z''$



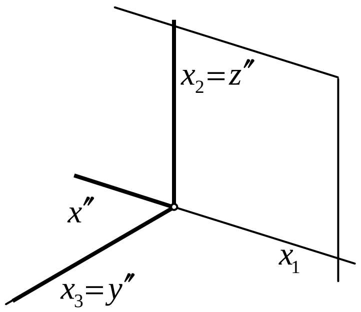
Výsledné otočenie zo základnej polohy *Oxyz* do polohy $Ox''y''z''$ je určené maticou
$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta_z)\ \mathbf{R}_x(-\theta_x)$.

Zhrnutie:

V ďalšom texte budeme pracovať so zobrazovacími metódami rovnobežného premietania, kde získané poznatky budeme používať pre konkrétnu zobrazovaciu metódu napríklad takto:

- určíme uhly otočení θ_z, θ_x a maticu $\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta_z)\ \mathbf{R}_x(-\theta_x)$
- zadáme smer premietania napr. pomocou odchýlky φ a určíme maticu $\mathbf{P}^{\varphi}$
- výsledkom postupu bude matica rovnobežného premietania **RP** do priemetne ε, konkrétnej zobrazovacej metódy, ktorú určíme $\mathbf{RP} = \mathbf{R}°\ \mathbf{P}^{\varphi}$

Príklad: Na obrázku je ilustrovaná poloha sústavy $Ox''y''z''$ po dvoch rotáciach: $\mathbf{R}_z(180°)$ a $\mathbf{R}_x(-90°)$.



Literatúra:

Macková, Zaťková: Riešenie základných úloh z deskriptívnej geometrie pomocou počítača, SVŠT Bratislava,1985

Žára, Beneš,Sochor,Felkel: Moderní počítačová grafika, Computer Press, Brno 2004