ZOBRAZOVACIE METÓDY ROVNOBEŽNÉHO PREMIETANIA

Zobrazenie trojrozmerných útvarov do dvojrozmernej roviny vzniklo na základe praktických potrieb človeka. Zobrazenie možno riešiť rôznymi spôsobmi, pričom pri riešení danej úlohy použijeme to zobrazenie, ktoré je najvýhodnejšie. V technickej praxi sa využíva najmä spôsob zobrazenia do roviny a tým je rovnobežné premietanie. Princíp premietania vznikol zo snahy vyhotoviť čo najnázornejšie obrázky, ktoré sa čo najviac približujú spôsobu, akým vníma okolitý svet ľudské oko. Metódy, ktorými realizujeme zobrazenie objektov na rovinu, nazývame ***zobrazovacie metódy***.

Zobrazovacia metóda je bijektívne zobrazenie útvaru z trojrozmerného priestoru na rovinu - priemetňu . Premietanie je jednou zložkou zobrazovacej metódy, pretože je bijektívne len v špeciálnych prípadoch.

Rôzne možnosti bijektívneho zobrazenia umožnia rôzne zobrazovacie metódy. Od každej zobrazovacej metódy, teda aj od premietania, sa vyžaduje splnenie dvoch požiadaviek: ***názornosti*** a ***merateľnosti***. Požiadavka názornosti má zabezpečiť, aby obraz priestorového útvaru poskytol čo najvernejšiu predstavu o zobrazovanom útvare. Podmienka merateľnosti má zabezpečiť možnosť odčítať z priemetu útvaru všetky potrebné informácie, najmä o rozmeroch útvaru.

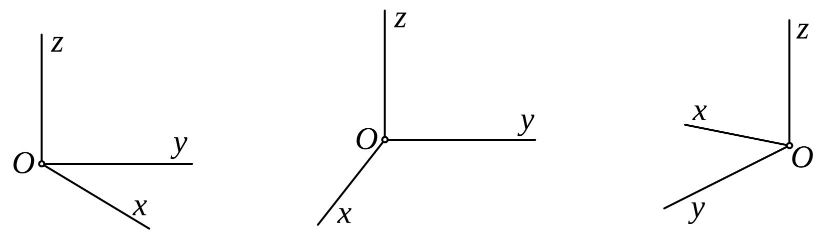
Možno povedať, že žiadna zobrazovacia metóda nespĺňa úplne obe požiadavky. Niektoré vyhovujú viac požiadavke merateľnosti a iné naopak. Preto je dôležité študovať jednotlivé zobrazovacie metódy a potom vybrať tú metódu, ktorá splní požiadavky na aký účel má výsledný priemet útvaru slúžiť.

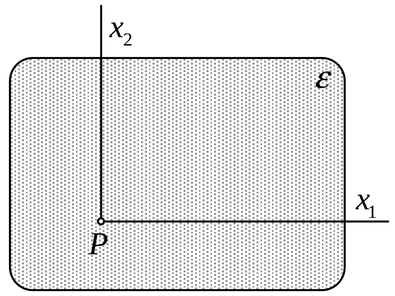
Jednotlivé zobrazovacie metódy budeme charakterizovať výberom

- priemetne ε - vzhľadom na pravouhlý trojhran $Oxyz$, pomocou uhlov θ_z, θ_x
- osnovy – smeru rovnobežného premietania **s**, pomocou zadania odchýlky φ

Pri syntetickom prístupe k zobrazovacím metódam nie je vždy potrebné pracovať so súradnicovou sústavou. Avšak vzhľadom na potrebné analytické vyjadrenie je vhodné túto súradnicovú sústavu zaviesť už pri vysvetľovaní zobrazovacej metódy.

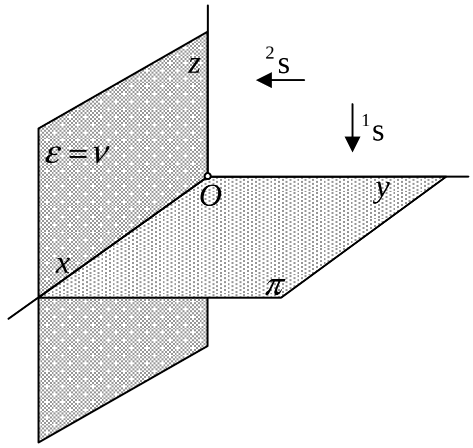
Preto budeme uvádzať: Zvoľme v priestore E^3 pravouhlý trojhran $Oxyz$, kde bod O je začiatok a priamky x, y, z sú osi súradnicovej sústavy a priemetňa ε má súradnicovú sústavu Px_1x_2.





Mongeovo zobrazenie

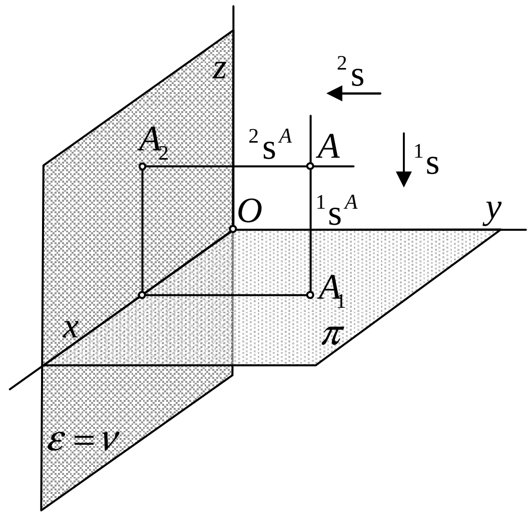
Princíp zobrazovacej metódy – syntetický prístup



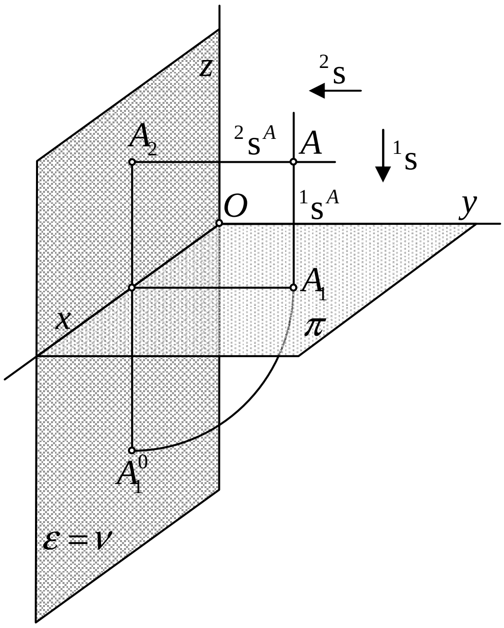
Nech *Oxyz* je v priestore E^3 pravouhlý trojhran, ktorého roviny $\pi = xy$ a $\nu = xz$ nazveme ***pôdorysňa*** a ***nárysňa***. Priesečnica $x = \pi \cap \nu$ sa nazýva ***základnica*** .
Určíme:

1. priemetňu ε - je totožná s nárysňou t.j. $\varepsilon = \nu$
2. smer premietania –
   (i) kolmé premietanie do pôdorysne π: $\{^1s\}, {}^1s \perp \pi$
   (ii) kolmé premietanie do nárysne ν: $\{^2s\}, {}^2s \perp \nu$

Nech bod $A \in E^3, A \notin \pi, A \notin \nu$, potom podľa definície rovnobežného premietania v prípade:
(i) $A_1 = {}^1s^A \cap \pi$, bod A_1 nazývame ***pôdorys bodu***
(ii) $A_2 = {}^2s^A \cap \nu$, bod A_2 nazývame ***nárys bodu***



Zobrazenie $\varphi : E^3 \to \pi \times \nu$, ktoré bodu $A \mapsto (A_1, A_2)$ priradí usporiadanú dvojicu bodov je bijekcia.
Otočme pôdorysňu π okolo základnice *x*, tak aby $\pi^\circ = \varepsilon = \nu$ a $ot(A_1) = A_1^\circ$.



Zobrazenie $\phi : E^3 \to \pi^\circ \times \nu$, ktoré priradí bodu $A \mapsto (A_1^\circ, A_2)$ usporiadanú dvojicu bodov, kde $A_1^\circ A_2 \perp x$ resp. $A_1^\circ = A_2$, je bijekcia.

Zobrazenie ϕ v priemetni ε nazývame ***Mongeovo zobrazenie*** resp.***metóda Mongea***.

Mongeovo zobrazenie je pomenované podľa francúzskeho matematika Gasparda Mongea (1746-1818), ktorý vybudoval princípy tejto zobrazovacej metódy. Mongeovo zobrazenie je najjednoduchšou a najbežnejšou zobrazovacou metódou používanou v technickej praxi. Názov tejto zobrazovacej metódy je aj "pravouhlé premietanie na dve združené priemetne", čo znamená, že pôdorysňa π sa popísaným otočením "združila" s priemetňou ν.

Nech U – je útvar v priestore E^3 , potom označíme:

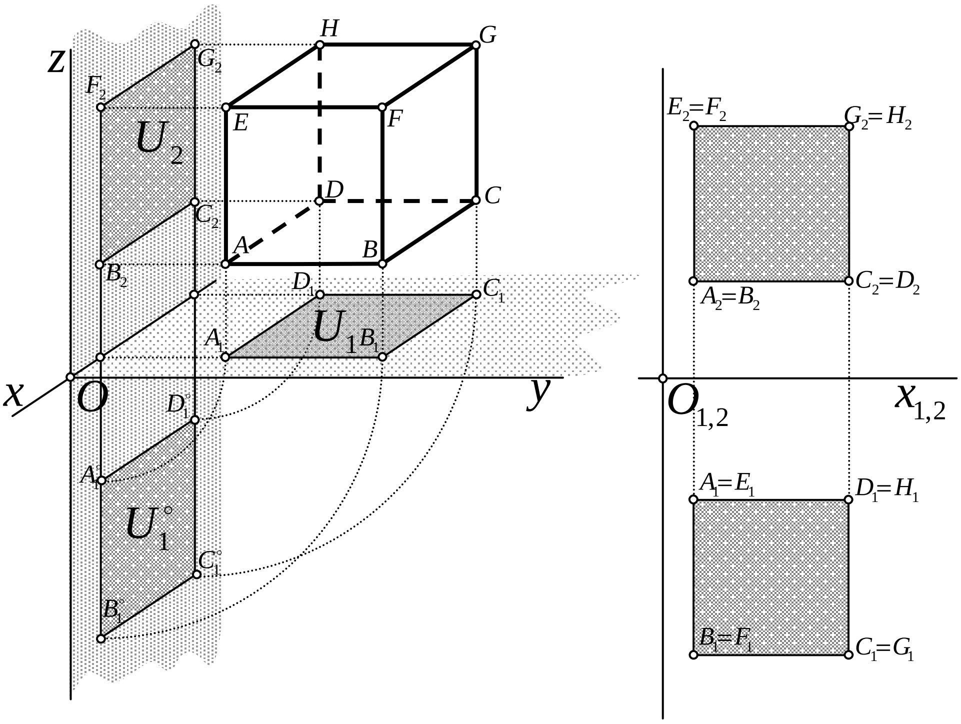
U_1 – ***pôdorys*** útvaru U, je to kolmý priemet útvaru U do roviny π

U_2 – ***nárys*** útvaru U, je to kolmý priemet útvaru U do roviny ν

(U_1°, U_2) - ***združené priemety útvaru U***, kde U_1° je otočený obraz priemetu U_1 do priemetne

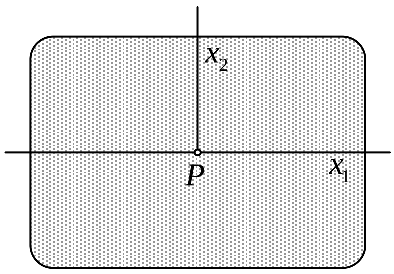
$\varepsilon = \pi_1^\circ \times \nu$

Príklad:
U- útvar je kocka *ABCDEFGH*, ktorej steny sú rovnobežné s rovinami π, ν.



Určíme:
U_1 – pôdorys útvaru *U*, je to štvorec $A_1B_1C_1D_1$ aj jeho vnútro
U_2 – nárys útvaru *U*, je to štvorec $B_2C_2G_2F_2$ aj jeho vnútro
Združené priemety: $U_1^\circ(A_1^\circ B_1^\circ C_1^\circ D_1^\circ)$ a $U_2(B_2C_2G_2F_2)$. V nákresni index “°” sa neuvádza.

Analytické vyjadrenie

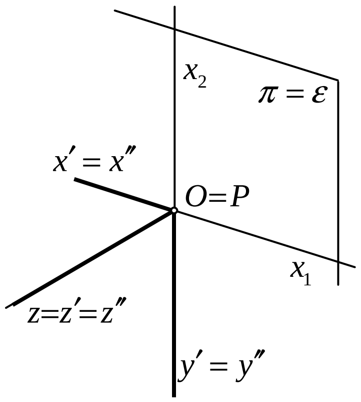


Priemetňa ε má karteziánsku súradnicovú sústavu Px_1x_2.
Mongeovo zobrazenie sme určili ako pravouhlé premietanie v dvoch smeroch a to :
(i) ${}^1s \perp \pi$ a (ii) ${}^2s \perp \nu$.

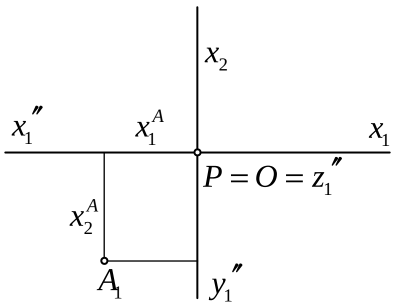
Maticu rovnobežného premietania $\mathbf{RP}^{\varphi}$ sme určili pre smer $\{s\}$ a priemetňu $\varepsilon = Px_1x_2$ a teraz v Mongeovom zobrazení je potrebné určiť túto maticu $\mathbf{RP}^{\varphi}$ pre každý smer a priemetňu osobitne. V ďalšom texte označenie rovnobežného priemetu - index *a* (zavedený pri rovnobežnom premietaní), nahradíme indexom 1 pre pôdorysy a 2 pre nárysy bodov.

(i) v smere $\{{}^1s\}$ - kolmé premietanie do pôdorysne $\pi = xy$

Určíme uhly otáčaní: $\mathbf{R}_z(180°)$ a $\mathbf{R}_x(0°)$.



Ilustrované sú otočené polohy $Ox'y'z'$ a $Ox''y''z''$ sústavy $Oxyz$ (základná poloha).
Po rovnobežnom premietnutí v smere ${}^1s \perp \pi$ poslednej polohy $Ox''y''z''$ do pôdorysne π, ktorá je totožná s priemetňou $\varepsilon = Px_1x_2$ môžeme v nákresni zobraziť:



kde $x_1''y_1''z_1''$ označujú prvé priemety (pôdorysy) sústavy $Ox''y''z''$ v priemetni a pre pôdorys A_1 bodu $A(x^A, y^A, z^A)$ dostávame:

$$x_1^A = -x^A$$
$$x_2^A = -y^A$$

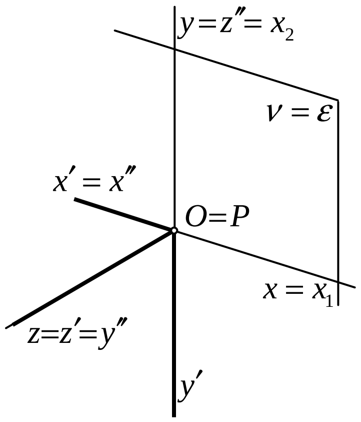
Súradnice vektorov $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ vieme tiež určiť: $\mathbf{u}_1(-1,0,0)$, $\mathbf{u}_2(0,-1,0)$.

Matica **RP** pre pôdorys:

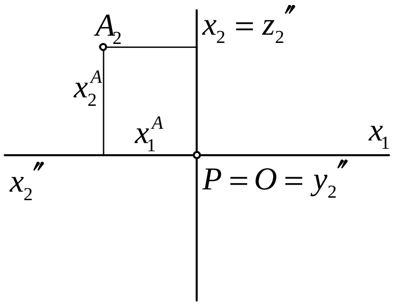
$$\mathbf{RP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) v smere $\left\{ {}^2s \right\}$ - kolmé premietanie do nárysne $\nu = xz$

Určíme uhly otáčaní: $\mathbf{R}_z(180°)$ a $\mathbf{R}_x(-90°)$.



Na obr. sú ilustrované otočené polohy $Ox'y'z'$ a $Ox''y''z''$ po otočení zo základnej polohy sústavy $Oxyz$.
Po rovnobežnom premietnutí v smere $^2s \perp \nu$ získanej polohy $Ox''y''z''$ do nárysne ν, ktorú stotožníme s priemetňou $\varepsilon = Px_1x_2$ môžeme v nákresni zobraziť:



kde $x_2''y_2''z_2''$ označujú druhé priemety (nárysy) a pre nárys A_2 bodu $A(x^A, y^A, z^A)$ zapíšeme:

$$x_1^A = -x^A$$
$$x_2^A = z^A$$

Súradnice vektorov $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ pre toto premietanie sú: $\mathbf{u}_1(-1,0,0)$, $\mathbf{u}_2(0,0,1)$.

Využitie Mongeovho zobrazenia v praxi je najmä v konštrukcii pôdorysu a nárysu útvaru. Tieto združené priemety sú dôležité pre technické výkresy, kde sa využíva najmä jednoduchosť merania rozmerov útvarov.