IV. ZOBRAZOVACIE METÓDY

Mongeovo zobrazenie

Gaspard **MONGE** (1746 – 1818) francúzsky matematik

<u>*Princíp zobrazovacej metódy*</u>

<u>Súvisiace pojmy:</u>

- **<u>pravouhlý trojhran</u>** – $Oxyz$ karteziánska súradnicová sústava v E_3
- **<u>prvá priemetňa (pôdorysňa)</u>** – rovina $\pi = xy$
- **<u>druhá priemetňa (nárysňa)</u>** - rovina $\nu = xz$
- **<u>základnica</u>** – priesečnica $x = \pi \cap \nu$
- **<u>kolmé premietanie do π</u>** - priemetňa π, smer $\{{}^1s\}$, ${}^1s \perp \pi$
- **<u>prvý priemet bodu A</u>** – priesečník premietacej priamky ${}^1s^A$ a priemetne π : $A_1 = {}^1s^A \cap \pi$
- **<u>kolmé premietanie do ν</u>**- priemetňa ν, smer $\{{}^2s\}$, ${}^2s \perp \nu$
- **<u>druhý priemet bodu A</u>** - priesečník premietacej priamky ${}^2s^A$ a priemetne ν: $A_2 = {}^2s^A \cap \nu$

<u>Veta IV.1</u> Zobrazenie φ: $E_3 \to \pi \times \nu$, $A \to [A_1, A_2]$, kde $A_1A_x \perp x$, $A_2A_x \perp x$, $A_x = AA_1A_2 \cap x$, je bijekcia.

<u>Združenie priemetní</u> – otočenie priemetne $\pi = (\pi_1)$ okolo priamky x do priemetne ν
ψ: $(\pi_1) \to (\pi_1^{\,0}) = \nu$, $A_1 \to A_1^0$

<u>Veta IV.2</u> Zobrazenie ψ: $E_3 \to \varepsilon = \pi_1^{\,0} \times \nu$, $A \to [A_1^0, A_2]$, kde $A_1^0A_2 \perp x$ alebo $A_1^0 = A_2$ je bijekcia.

<u>Definícia IV.1</u>
Mongeovo zobrazenie - Mongeova metóda - Pravouhlé premietanie na dve združené priemetne - bijektívne zobrazenie ψ

<u>Súvisiace pojmy:</u>

- **<u>združené priemety bodu A (pôdorys, nárys)</u>** – body A_1^0, A_2
- **<u>ordinála bodu</u>**- kolmica $A_1^0A_2$ na základnicu x
- **<u>pôdorys U_1</u>**- množina pôdorysov bodov útvaru U
- **<u>nárys U_2</u>**- množina nárysov bodov útvaru U
- **<u>združené priemety útvaru</u>**- usporiadaná dvojica pôdorys a nárys útvaru U

<u>Orientácia polpriestorov</u> - vytvorenie štyroch kvadrantov
I. kvadrant : $A(x_A, y_A>0, z_A>0)$ II.kvadrant: $B(x_B, y_B<0, z_B>0)$
III.kvadrant : $C(x_C, y_C<0, z_C<0)$ IV. kvadrant: $D(x_D, y_D>0, z_D<0)$

Združené priemety priamky *a* – usporiadaná dvojica priamok (a_1,a_2)

Súvisiace pojmy:

- **pôdorysný stopník priamky** – priesečník priamky s 1.priemetňou $P^a = a \cap \pi$ (ak $\exists$)
- **nárysný stopník priamky** – priesečník priamky s 2.priemetňou $N^a = a \cap \nu$ (ak $\exists$)
- **prvá premietacia priamka** – priamka kolmá na 1. priemetňu
- **druhá premietacia priamka** – priamka kolmá na 2. priemetňu

Združené priemety roviny – združené priemety určujúcich prvkov roviny

- tri nekolineárne body
- dve rôznobežky
- dve rôzne rovnobežky
- bod a priamka neincidujúca daným bodom

Súvisiace pojmy:

- **pôdorysná stopa roviny** – priesečnica roviny a 1.priemetne $p^\alpha = \alpha \cap \pi$ (ak $\exists$)
- **nárysná stopa roviny** – priesečnica roviny a 2.priemetne $n^\alpha = \alpha \cap \nu$(ak $\exists$)
- **prvá premietacia rovina** – rovina kolmá na 1.priemetňu
- **druhá premietacia rovina** – rovina kolmá na 2.priemetňu

Významné priamky roviny:

Hlavná priamka 1. osnovy – priamka roviny rovnobežná s prvou priemetňou $h^1 || \pi$

Hlavná priamka 2. osnovy – priamka roviny rovnobežná s druhou priemetňou $h^2 || \nu$

Spádová priamka 1.osnovy – priamka roviny kolmá na hlavné priamky 1.osnovy $s^1 \perp h^1$

Veta IV.3 Pôdorysy hlavnej a spádovej priamky 1.osnovy sú kolmé priamky $s^1{}_1 \perp h^1{}_1$

Spádová priamka 2.osnovy – priamka roviny kolmá na hlavné priamky 2.osnovy $s^2 \perp h^2$

Veta IV.4 Nárysy hlavnej a spádovej priamky 2.osnovy sú kolmé priamky $s^2{}_2 \perp h^2{}_2$

METRICKÉ ÚLOHY

Sklápanie roviny – otáčanie roviny kolmej na priemetňu do priemetne

A7. Algoritmus konštrukcie : **sklápanie roviny α do prvej priemetne π**

α, $\alpha \perp \pi$ - 1. premietacia rovina

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \pi$, $M\ (x_M, y_M, z_M)$

- **os otáčania**
  $\alpha \cap \pi = p^\alpha$ $\qquad\qquad$ α_1
- **rovina otáčania bodu *M***
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp \alpha \cap \pi$ $\qquad\qquad$ $\sigma_1{}^M : M_1 \in \sigma_1, \sigma_1{}^M \perp \alpha_1$
- **stred otáčania bodu *M***
  $\sigma^M \cap (\alpha \cap \pi) = \sigma^M \cap p^\alpha = M_1$ $\qquad\qquad$ M_1
- **polomer otáčania bodu *M***
  $r = |MM_1| = z_M$ $\qquad\qquad$ z_M
- **sklopená poloha bodu *M***
  (M): $(M) \in \sigma \cap \pi$, $|(M)M_1| = z_M$ $\qquad\qquad$ $(M) \in \sigma_1{}^M$, $|(M)M_1| = z_M$

A8. Algoritmus konštrukcie : **sklápanie roviny α do druhej priemetne ν**

α, $\alpha \perp \nu$ - 2. premietacia rovina

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \nu$, $M\,(x_M, y_M, z_M)$

- **<u>os otáčania</u>**
  $\alpha \cap \nu = n^{\alpha}$ — α_2
- **<u>rovina otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M : M \in \sigma^M,\ \sigma^M \perp \alpha \cap \nu$ — $\sigma_2^M : M_2 \in \sigma_2^M, \sigma_2^M \perp \alpha_2$
- **<u>stred otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M \cap (\alpha \cap \nu) = \sigma^M \cap n^{\alpha} = M_2$ — M_2
- **<u>polomer otáčania bodu *M*</u>**
  $r = |MM_2| = y_M$ — y_M
- **<u>sklopená poloha bodu *M*</u>**
  $(M) : (M) \in \sigma \cap \nu$, $|(M)M_2| = y_M$ — $(M) : (M) \in \sigma_2^M$, $|(M)M_2| = y_M$

<u>Dĺžka úsečky*AB*</u>

– A_1B_1 sklopenie prvej premietacej roviny úsečky do prvej priemetne
– A_2B_2 sklopenie druhej premietacej roviny úsečky do druhej priemetne

<u>Otáčanie roviny do priemetne</u>

A9. Algoritmus konštrukcie : **otáčanie roviny α do prvej priemetne π**

rovina $\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \pi$

- **<u>os otáčania</u>**
  $\alpha \cap \pi = p^{\alpha}$ — p_1^{α}
- **<u>rovina otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp p^{\alpha}, \sigma^M \cap \alpha = s^{\mathrm{I}}$ — $\sigma_1^M \perp p_1^{\alpha}$, $\sigma_1^M = s^1_1$
- **<u>stred otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M \cap p^{\alpha} = P^s$ — $\sigma_1^M \cap p_1^{\alpha} = P^s_1$
- **<u>polomer otáčania bodu *M*</u>**
  $r = |MP^s|$ — $|(M)(P^s)|$ dĺžka úsečky $M_1P^s_1$
- **<u>otočená poloha bodu *M*</u>**
  $M_0 : M_0 \in \sigma^M \cap \pi$, $|M_0P^s| = |MP^s|$ — $M_0 \in \sigma_1^M$, $|M_0(P^s)| = |(M)(P^s)|$

<u>Veta IV.5</u> Medzi pôdorysmi bodov roviny α ($\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$) a otočenými polohami bodov do prvej priemetne π je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je prvý priemet pôdorysnej stopy roviny α.

A10. Algoritmus konštrukcie : **otáčanie roviny α do druhej priemetne ν**

rovina $\alpha \not\angle \nu$, $\alpha \nparallel \nu$

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \nu$

- **<u>os otáčania</u>**
  $\alpha \cap \nu = n^{\alpha}$ $\qquad\qquad$ n_2^{α}
- **<u>rovina otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp n^{\alpha}, \sigma^M \cap \alpha = s^2$ $\qquad\qquad$ $\sigma_2^M \perp n_2^{\alpha}$, $\sigma_2^M = s^2_2$
- **<u>stred otáčania bodu *M*</u>**
  $\sigma^M \cap n^{\alpha} = N^s$ $\qquad\qquad$ $\sigma_2^M \cap n_2^{\alpha} = N^s_2$
- **<u>polomer otáčania bodu *M*</u>**
  $r = |MN^s|$ $\qquad\qquad$ $|(M)(N^s)|$ dĺžka úsečky $M_2N^s_2$
- **<u>otočená poloha bodu *M*</u>**
  $M_0 : M_0 \in \sigma^M \cap \nu$, $|M_0N^s| = |MN^s|$ $\qquad\qquad$ $M_0 \in \sigma^M_2$, $|M_0(N^s)| = |(M)(N^s)|$

<u>Veta IV.6</u> Medzi nárysmi bodov roviny α (**$\alpha \not\angle \nu$, $\alpha \nparallel \nu$)** a otočenými polohami bodov do druhej priemetne ν je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je druhý priemet nárysnej stopy roviny α

<u>Veta IV.7</u> **<u>Združené priemety kružnice *l*</u>** – kružnica *l* leží v rovine, ktorá nemá osobitnú polohu

- **<u>pôdorys kružnice *l* je elipsa l_1</u>**, ktorej hlavná os leží na pôdoryse hlavnej priamky 1.osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice
- **<u>nárys kružnice *l* je elipsa l_2,</u>** ktorej hlavná os leží na náryse hlavnej priamky 2.osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice

<u>Veta IV.8</u> **<u>Združené priemety kolmice *k* na rovinu</u>**

- **<u>pôdorys kolmice *k* je priamka k_1</u>** kolmá na pôdorys hlavnej priamky 1.osnovy h^1_1
- **<u>nárys kolmice *k* je priamka k_2</u>** kolmá na nárys hlavnej priamky 2.osnovy h^2_2