# ZOBRAZOVACIE METÓDY ROVNOBEŽNÉHO PREMIETANIA

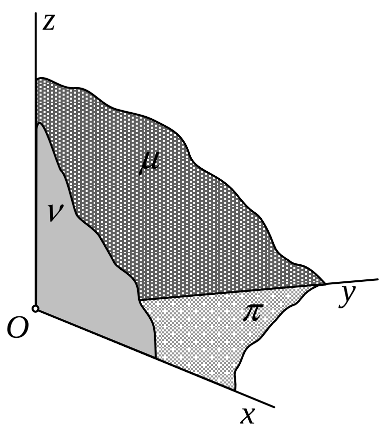
Výhodou Mongeovho zobrazenia – určenie pôdorysu a nárysu, ktoré sa používa najmä na technických výkresoch – je jednoduchosť merania rozmerov útvarov. Nevýhodou tejto zobrazovacej metódy je, že získané priemety sú “málo” názorné, t.j. stráca sa priestorová informácia o útvare.

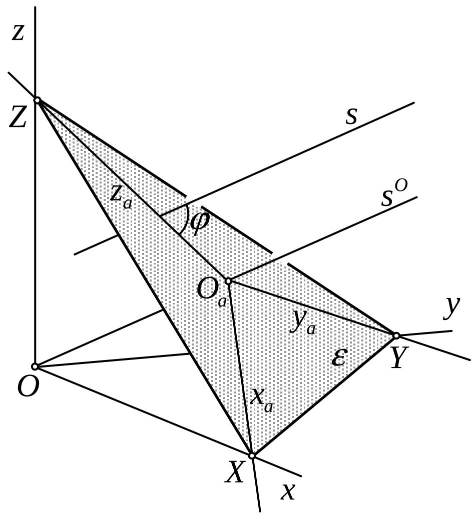
Práve z týchto dôvodov, ak potrebujeme získať viac priestorových informácií o útvare, je vhodné zvoliť k zobrazovaniu útvaru metódu axonometrie, ktorá ponúka názorné zobrazenie útvaru, avšak na úkor merania.

## Axonometria

Princíp zobrazovacej metódy – syntetický prístup

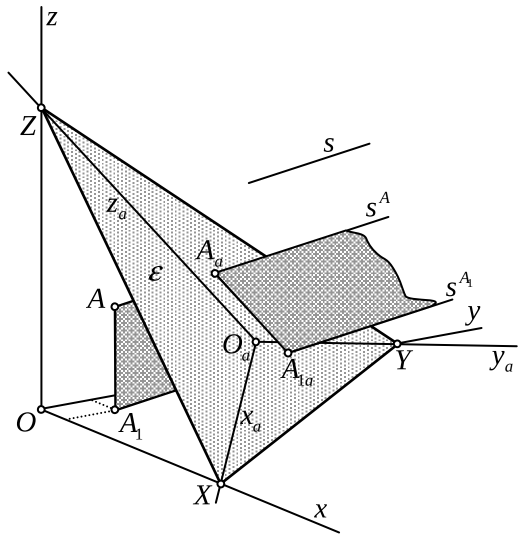
Nech *Oxyz* je v priestore $E^3$ pravouhlý trojhran, ktorého ***hrany*** *x*, *y*, *z* určujú tri roviny roviny $\pi = xy$ , $\nu = xz$ a $\mu = yz$ tzv. ***steny*** trojhranu.




Určíme:

1. rovinu $\varepsilon$, ktorá neinciduje s bodom *O*, pretína hrany trojhranu v bodoch $X = x \cap \varepsilon$, $Y = y \cap \varepsilon$, $Z = z \cap \varepsilon$ a steny trojhranu v priamkach $XY = \pi \cap \varepsilon$, $XZ = \nu \cap \varepsilon$, $YZ = \mu \cap \varepsilon$. Rovina $\varepsilon$ sa nazýva ***axonometrická priemetňa*** a trojuholník *XYZ* ***axonometrický trojuholník***
2. smer premietania $\{s\}$, ktorý je rôznobežný s axonometrickou priemetňou $\varepsilon$ a s rovinami $\pi, \nu, \mu$ . Označíme odchýlku $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon$ , uhol $\varphi$ je ostrý alebo 90°.
3. rovnobežný priemet bodu *O* do priemetne $\varepsilon$ : $O_a = s^O \cap \varepsilon, s^O \in \{s\}$, ktorý nazývame ***axonometrický priemet bodu*** a označíme indexom “*a*”. Bod $O_a$ je vnútorným bodom axonometrického trojuholníka
4. rovnobežný priemet hrán *x*, *y*, *z* , sú priamky $x_a, y_a, z_a$, ktoré incidujú s axonometrickým priemetom $O_a$ bodu *O* a vrcholmi axonometrického trojuholníka *XYZ*. Útvar $O_a x_a y_a z_a$ v priemetni $\varepsilon$ nazývame ***axonometrický osový kríž***.




Nech bod $A \in E^3, A \notin \pi, A \notin \nu, A \notin \mu, A \notin \varepsilon$, a bod $A_1$ je kolmý priemet bodu $A$ do roviny $\pi = xy$ (pôdorys bodu). Určíme axonometrické priemety bodov:

$A$: $A_a = s^A \cap \varepsilon, s^A \in \{s\}$,

$A_1$: $A_{1a} = s^{A_1} \cap \varepsilon, s^{A_1} \in \{s\}$. Platí : $A_a A_{1a} \parallel z_a$.

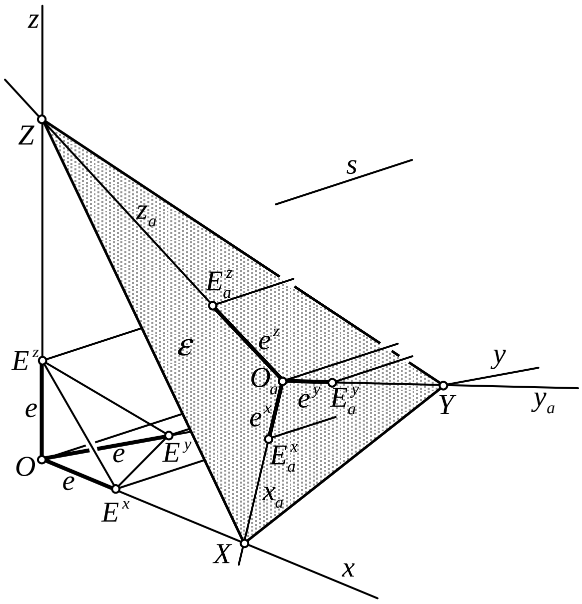
Zobrazenie $\phi : E^3 \to \varepsilon \times \varepsilon$, ktoré bodu $A \in E^3$ priradí usporiadanú dvojicu bodov $(A_a, A_{1a})$ v priemetni $\varepsilon$ tak, že $A_a A_{1a} \parallel z_a$, je bijekcia.

Zobrazenie $\phi$ nazývame ***metóda axonometrie*** v priemetni $\varepsilon$.

Zobrazovaciu metódu axonometrie nazývame metódou ***pravouhlej ( kolmej ) axonometrie*** ak smer premietania $\{s\}$ je kolmý na priemetňu t.j. $\varphi = 90°$ , inak hovoríme o metóde ***kosouhlej ( šikmej ) axonometrie*** t.j. $\varphi$ je ostrý uhol.

**Axonometrická súradnicová sústava**

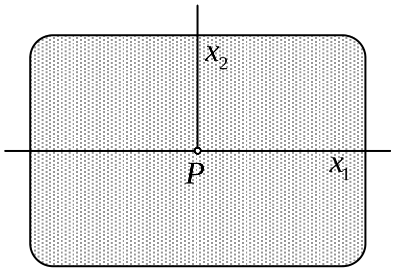
Nech $e$ je rovnaká jednotka merania na hranách $x$, $y$, $z$ t.j. $|OE^x| = |OE^y| = |OE^z| = e$, kde body $E^x \in x, E^y \in y, E^z \in z$ s bodom $O$ vytvoria štvorsten $OE^xE^yE^z$. Pravouhlý trojhran s vyznačenými bodmi $O, E^x, E^y, E^z$ je karteziánskou súradnicovou sústavou priestore $E^3$.



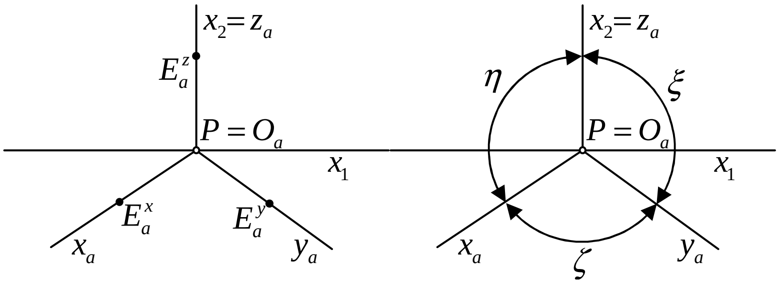
Určíme rovnobežný priemet štvorstena $OE^xE^yE^z$ do priemetne $\varepsilon$:

- je to útvar $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$, ktorý nazveme ***axonometrická súradnicová sústava***
- dĺžky $\left|O_aE_a^x\right| = e^x, \left|O_aE_a^y\right| = e^y, \left|O_aE_a^z\right| = e^z$ - nazveme ***axonometrické jednotky*** a
- polpriamky $O_aE_a^x = x_a, O_aE_a^y = y_a, O_aE_a^z = z_a$ nazveme - ***axonometrické osi***.

V priemetni $\varepsilon \subset E^2$ je určená karteziánska súradnicová sústava $Px_1x_2$, ktorú v nákresni štandartne zobrazujeme:




Axonometrickú súradnicovú sústavu $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$ v nákresni $Px_1x_2$ umiestnime takto: $P = O_a$, $z_a = x_2$




Je to štandartné umiestnenie pre pravotočivú bázu. Označíme uhly pri vrchole $O_a$ :

$$\xi = \sphericalangle y_a z_a, \eta = \sphericalangle x_a z_a, \zeta = \sphericalangle x_a y_a .$$

Často sa zadáva axonometrický osový kríž $O_a x_a y_a z_a$ práve pomocou týchto uhlov.

Nech v nákresni $Px_1x_2$ je zadaný axonometrický osový kríž $O_a x_a y_a z_a$.

Z hľadiska existencie axonometrie je vhodné vysvetliť

- možno axonometrickú súradnicovú sústavu $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$ v nákresni voliť ľubovolne
- • ako súvisí voľba axonometrických jednotiek $e^x$, $e^y$, $e^z$ so smerom premietania $\{s\}$.

• K vysvetleniu prvej časti uvedieme Pohlkeho vetu, ktorej rôzne formulácie sú uvedené v literatúre [Skl.,Kr]. Pre ďalšie analytické vyjadrenie je vhodná formulácia vety:

***Veta Pohlkeho***:

Úsečky $O_aE_a^x, O_aE_a^y, O_aE_a^z$ v rovine, ktoré ležia na troch rôznych priamkach $x_a$, $y_a$, $z_a$ so spoločným bodom $O_a$ možno považovať za rovnobežné priemety troch zhodných, kolmých úsečiek $OE^x, OE^y, OE^z$ .

Znamená to, že ak nie sú vyslovené ďalšie požiadavky ( napr. $\varphi$ = 90° ) môžeme podľa Pohlkeho vety v priemetni voliť axonometrické jednotky $\left|O_aE_a^x\right| = e^x, \left|O_aE_a^y\right| = e^y, \left|O_aE_a^z\right| = e^z$ ľubovoľne. Vždy existuje v priestore karteziánska sústava s takou jednotkou

$\left|OE^x\right| = \left|OE^y\right| = \left|OE^z\right| = e$, že daná axonometrická sústava $O_a E_a^x E_a^y E_a^z$ je jej rovnobežným priemetom.

•• Pre vysvetlenie druhej časti potrebujeme určiť uhol $\varphi$. Ten je s jednotkami $e$, $e^x$, $e^y$, $e^z$ zviazaný predpisom $\left(\frac{e^x}{e}\right)^2 + \left(\frac{e^y}{e}\right)^2 + \left(\frac{e^z}{e}\right)^2 = 2 + \cot g^2\varphi$ (1)

Čísla $u = \frac{e^x}{e}, v = \frac{e^y}{e}, w = \frac{e^z}{e}$ nazývame ***koeficienty zmeny (skrátenia*** *alebo* ***predĺženia)*** na axonometrických osiach. Teda uhol $\varphi$ závisí od voľby axonometrickej súradnicovej sústavy prostredníctvom koeficientov zmeny.

Ak pre koeficienty zmeny platí:

- tri koeficienty zmeny sú rovnaké, je axonometria ***izometriou***: $\boldsymbol{u:v:w = 1:1:1}$
- práve dva koeficienty zmeny sú rovnaké, je axonometria ***dimetriou***: $\boldsymbol{u:v:w = 1:1:w}$, $\boldsymbol{u:v:w = 1:v:1}$, $\boldsymbol{u:v:w = u:1:1}$
- nijaké dva koeficienty zmeny sú rovnaké, je axonometria ***trimetriou***.

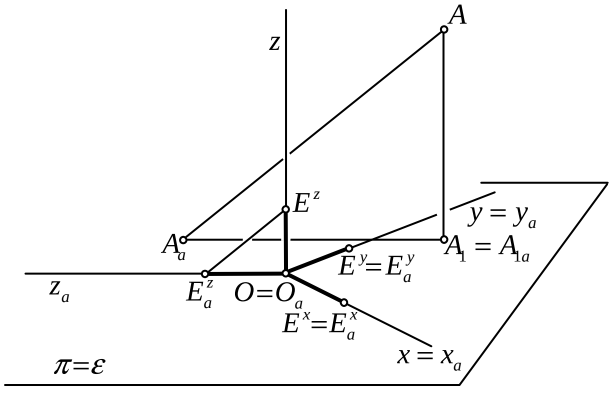
Pri výbere polohy axonometrickej priemetne $\varepsilon$ vzhľadom na pravouhlý trojhran *Oxyz* sme predpokladali, že rovina $\varepsilon$ pretne hrany trojhranu v bodoch, ktoré vytvoria axonometrický trojuholník *XYZ*. Takúto axonometriu nazývame ***jednoduchá axonometria***.

V technickej praxi ( najmä na stavebných výkresoch) ale aj pedagogickom procese (voľné rovnobežné premietanie ) je výhodné stotožniť axonometrickú priemetňu s niektorou zo stien $\pi = xy$ , $\nu = xz$ a $\mu = yz$ trojhranu *Oxyz*. V tomto prípade axonometrický trojuholník sa degeneruje a axonometriu nazývame ***degenerovaná axonometria***.

## Degenerované axonometrie

### Vojenská axonometria

Axonometrická priemetňa $\varepsilon$ je totožná s rovinou $\pi = xy$ pravouhlého trojhranu *Oxyz* a odchýlka $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon$ = 45°.

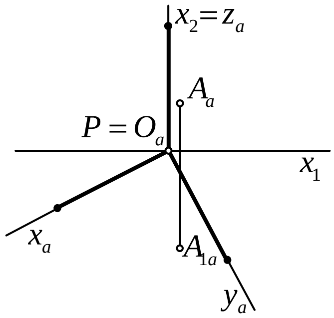


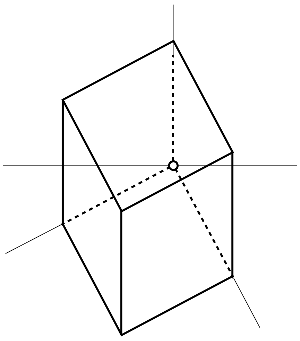

Platí:

• axonometrické priemety $x_a$, $y_a$ hrán $x$, $y$ sú **kolmé**

•• pre axonometrické jednotky $e^x = e^y = e^z = k.e$, $k>0$, t.j. $\boldsymbol{u:v:w = 1:1:1}$

V priemetni $\varepsilon$ stotožnenej s nákresňou so súradnicovou sústavou $Px_1x_2$ je umiestnenie axonometrickej sústavy $O_a E_a^x E_a^y E_a^z$ pre vojenskú axonometriu:



$\zeta$=90° , $\xi \in$ <135°,165°>. Výber uhla $\xi$ z uvedeného intervalu ponúka viac možností získania axonometrického priemetu útvaru. • označujú polohu bodov $E_a^x, E_a^y, E_a^z$ na axonometrických priemetoch hrán $x_a, y_a, z_a$

Vojenská axonometria je vhodná najmä na technických výkresoch urbanistického riešenia sídlisk, interiérov bytov a objektov s komplikovaným pôdorysom.

Analytické vyjadrenie :

- parametre otočení: $\theta_z = 180° + A, \eta = 90° + A, A \in \langle 15°, 60° \rangle$

  $\theta_x = 0°$
- parameter premietania: $\varphi = 45°$ ( výber tvoriacej priamky je určený v otočení $R_z(\theta_z)$)

V nákresni so súradnicovou sústavou $Px_1x_2$, ak $\xi = 135°, \eta = 135°$ , tak pre bod $A(x^A, y^A, z^A)$ vypočítame:

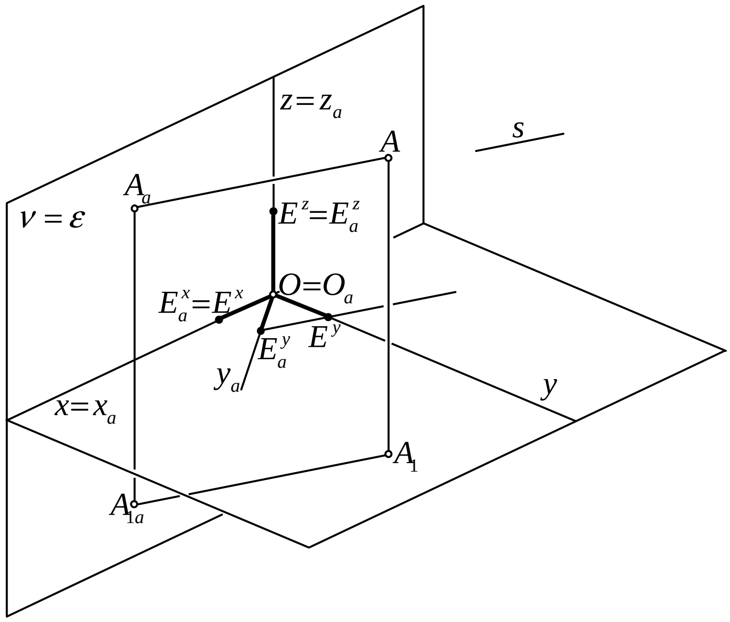
$$x_1^A = \frac{\sqrt{2}}{2} y^A - \frac{\sqrt{2}}{2} x^A$$

$$x_2^A = z^A - \frac{\sqrt{2}}{2} x^A - \frac{\sqrt{2}}{2} y^A$$

Poznámka: komplexnejšie vyjadrenie bude v analytickom vyjadrení axonometrie

**Šikmé zobrazenie**

Axonometrická priemetňa $\varepsilon$ je totožná s rovinou $\nu = xz$ pravouhlého trojhranu $Oxyz$ a odchýlka $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon$ , je určená pre uhol $\varphi \in <45°, 90°)$.




Platí:

• axonometrické priemety $x_a$, $z_a$ hrán $x$, $z$ sú **kolmé**

•• pre axonometrické jednotky $e^x = e^z = k.e$, $k>0$, a $e^y = e$. cotg$\varphi$ $\left(\cot g\varphi = \frac{|O_a E_a^y|}{|OE^y|} = \frac{e^y}{e} = v\right)$

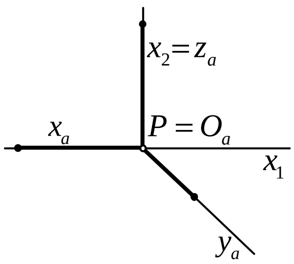
t.j. $\boldsymbol{u{:}v{:}w = 1{:}v{:}1}$.

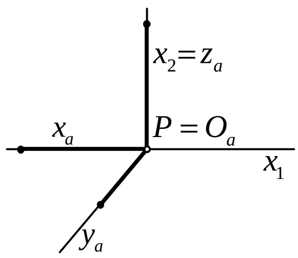
Teda napríklad ak $\varphi = 60°$, tak $v = \sqrt{3}/3$ a $\boldsymbol{u{:}v{:}w = 1{:}\sqrt{3}/3{:}1}$

$\varphi = 63{,}4°$, tak $v = 1/2$ a $\boldsymbol{u{:}v{:}w = 1{:}1/2{:}1}$

$\varphi = 45°$, tak $v = 1$ a $\boldsymbol{u{:}v{:}w = 1{:}1{:}1}$

V priemetni $\varepsilon$ stotožnenej s nákresňou so súradnicovou sústavou $Px_1x_2$ je umiestnenie axonometrickej sústavy $O_a E_a^x E_a^y E_a^z$ pre šikmé zobrazenie:



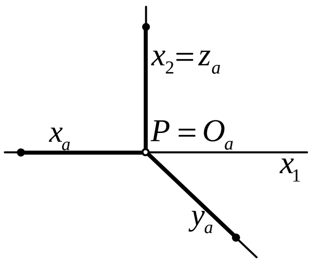



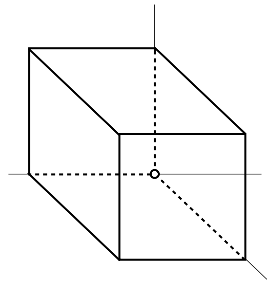

$\eta = 90°$ , $\xi = 90° + \omega$, najčastejšie $\omega = 45°$, $\omega = 135°$ . Výber uhla $\xi$ z uvedeného intervalu ponúka viac možností získania axonometrického priemetu útvaru. • označujú polohu bodov $E_a^x, E_a^y, E_a^z$ na axonometrických priemetoch hrán $x_a, y_a, z_a$.

Ak uhol $\omega = 45°$ nazývame priemet útvaru v šikmom zobrazení ***nadhľad zľava,*** ak uhol $\omega = 135°$ získaný priemet útvaru nazývame ***nadhľad sprava***.

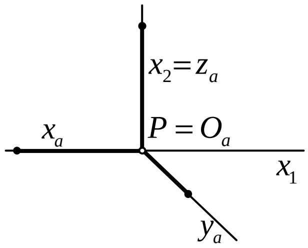
Pri výbere smeru premietania $\{s\}$ak:

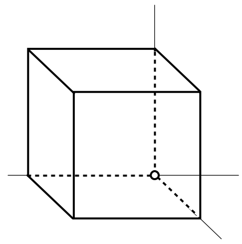
• odchýlka $\varphi = \measuredangle s,\varepsilon$ = **45°** a uhol $\omega$ = 45° resp. $\omega$ = 135° nazývame šikmé zobrazenie ***kavalierna axonometria***.

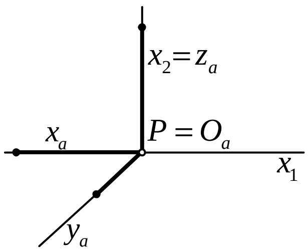


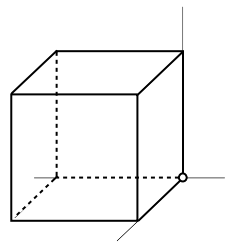



• odchýlka $\varphi = \measuredangle s,\varepsilon$ = **63.4°** potom je koeficient zmeny ***v* = cotg 63.4° = 1/2** a pre uhol $\boldsymbol{\omega}$ **= 45°** resp. $\boldsymbol{\omega}$ **= 135°** je získaný priemet útvaru zobrazený ako vo ***voľnom rovnobežnom premietaní*** a to v nadhľade zľava resp. sprava. Na tomto mieste je vhodné upozorniť na skutočnosť ako sa získava rovnobežný priemet kocky používaný v stereometrii.





Zobrazovacia metóda šikmé zobrazenie sa využíva najmä pri zobrazovaní stavebných objektov s komplikovaným nárysom. Priamo z nárysu možno“vytiahnuť“ axonometriu objektu.

Analytické vyjadrenie :

• parametre otočení: $\theta_z = 180°$

$\theta_x = -90°$

• parameter premietania: $\varphi \in \langle 45°, 90°)$ , výber tvoriacej priamky – nadhľad zľava, nadhľad sprava

V nákresni so súradnicovou sústavou $Px_1x_2$, ak $\xi = 135°, \eta = 90°$ , tak pre bod $A(x^A, y^A, z^A)$ vypočítame pre rôzne hodnoty uhla $\varphi \in \langle 45°, 90°)$ súradnice šikmého priemetu bodu:

$$x_1^A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cot g\varphi . y^A - x^A$$

$$x_2^A = z^A - \frac{\sqrt{2}}{2}\cot g\varphi . y^A$$

Poznámka: komplexnejšie vyjadrenie bude v analytickom vyjadrení axonometrie

Degenerované axonometrie majú výhodu rýchlej konštrukcie axonometrie útvaru buď z daného pôdorysu ( vojenská axonometria ) alebo nárysu ( šikmé zobrazenie ). Redukcia jednotky najviac v jednom smere ( súradnicová os $y$ ) a menenie polohy axonometrickej súradnicovej sústavy je dosť ohraničené. Vyhnúť sa tomuto obmedzeniu možno len v jednoduchej axonometrii.

# Jednoduché axonometrie

Nech axonometrická priemetňa $\varepsilon$ nie je totožná so žiadnou zo stien pravouhlého trojhranu *Oxyz*. Potom priemetňa pretína hrany trojhranu v bodoch *X,Y,Z,* ktoré vytvárajú v priemetni axonometrický trojuholník *XYZ* (ostrouhlý).

Po určení priemetne potrebujeme pre rovnobežné premietanie zadať smer premietania, napríklad pomocou odchýlky $\varphi = \measuredangle s,\varepsilon$ , ak uhol $\varphi$ je ostrý budeme pracovať so zobrazovacou metódou ***kosouhlá ( šikmá ) axonometria***. Ak uhol $\varphi$ je pravý, tak zobrazovacia metóda bude ***pravouhlá ( kolmá ) axonometria***.

## Kosouhlá ( šikmá ) axonometria

Vstupnými prvkami tejto zobrazovacej metódy je pravouhlý trojhran *Oxyz*, priemetňa $\varepsilon$ incidujúca bodmi *X,Y,Z*. Smer premietania $\{s\}$ a priemetňa vytvárajú ostrý uhol $\varphi = \measuredangle s,\varepsilon$ . Pohlkeho veta nám umožňuje v nákresni , ktorá je totožná s priemetňou $\varepsilon$ zvoliť axonometrickú súradnicovú sústavu ľubovoľne a získať informáciu o veľkosti uhla $\varphi$ je možné pomocou vzťahu $\left(\frac{e^x}{e}\right)^2 + \left(\frac{e^y}{e}\right)^2 + \left(\frac{e^z}{e}\right)^2 = 2 + \cot g^2\varphi$ .

Pre používateľa, ktorý nemá skúsenosti s touto zobrazovacou metódou je výhodné ponúknuť konkrétne zadania, ktoré sú odskúšané a overené v praxi pri kreslení axonometrických priemetov objektov. Nasledovná ponuka bude rozdelená na kosouhlú izometriu, dimetriu a trimetriu t.j. podľa pomeru koeficientov skrátenia *u*, *v*, *w* resp.axonometrických jednotiek $e^x, e^y, e^z$ na jednotlivých axonometrických súradnicových osiach.

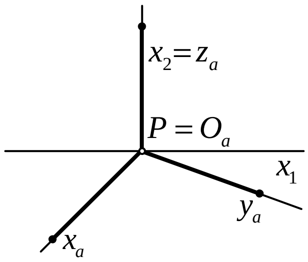
Nech *e* = 1, potom $e^x = u$, $e^y = v$, $e^z = w$. Priemety bodov $E_a^x, E_a^y, E_a^z$ na axonometrických priemetoch hrán $x_a, y_a, z_a$ sú na ilustračných obrázkoch označené •. Ponuka intervalov znamená výber rôznych tvoriacich priamok k danému smeru premietania $\{s\}$.

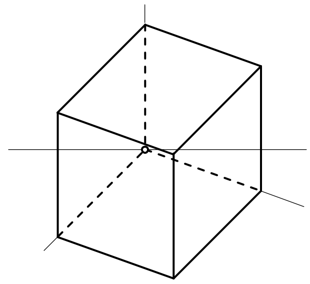
## Kosouhlá izometria :

***u*:*v*:*w* = 1:1:1**

V nákresni $Px_1x_2$ je určená axonometrickým osovým krížom $O_a x_a y_a z_a$ :

$\xi = 110°, \eta = 135°$ , $e^x = e^y = e^z = e$.



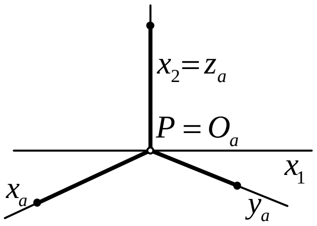



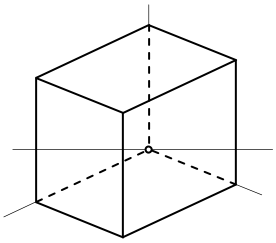
**Kosouhlá dimetria** :

• ***u***:***v***:***w*** **= 1:3/4:1**

V nákresni $Px_1x_2$ je určená axonometrickým osovým krížom $O_ax_ay_az_a$ :

$\xi \in (110°,115°), \eta \in (110°,120°), e^x = e^z = e, e^y = 3/4e$

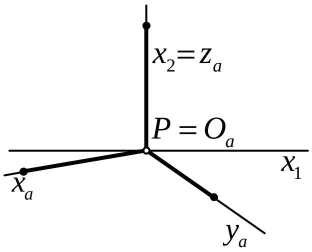


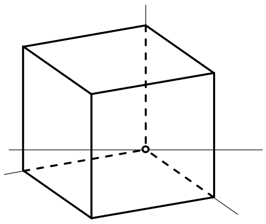


• ***u***:***v***:***w*** **= 1:2/3:1**

V nákresni $Px_1x_2$ je určená axonometrickým osovým krížom $O_ax_ay_az_a$ :

$\xi \in (120°,135°), \eta \in (95°,105°), e^x = e^z = e, e^y = 2/3e$



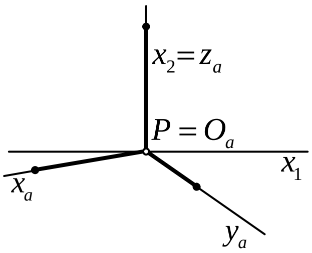


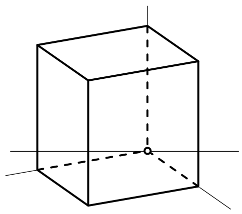
**Kosouhlá trimetria** :

• ***u***:***v***:***w*** **= 9: 5:10**

V nákresni $Px_1x_2$ je určená axonometrickým osovým krížom $O_ax_ay_az_a$ :

$\xi \in (120°,135°), \eta \in (95°,105°), e^x = 9/10e, e^y = 1/2e, e^z = e$

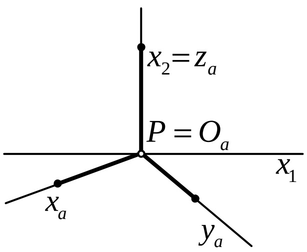


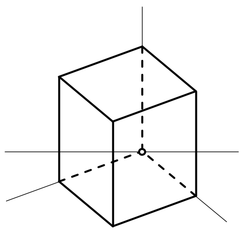


• ***u***:***v***:***w*** **= 5/7: 4/7:6/7**

V nákresni $Px_1x_2$ je určená axonometrickým osovým krížom $O_ax_ay_az_a$ :

$\xi = 130°, \eta = 110°, e^x = 5/7e, e^y = 4/7e, e^z = 6/7e$





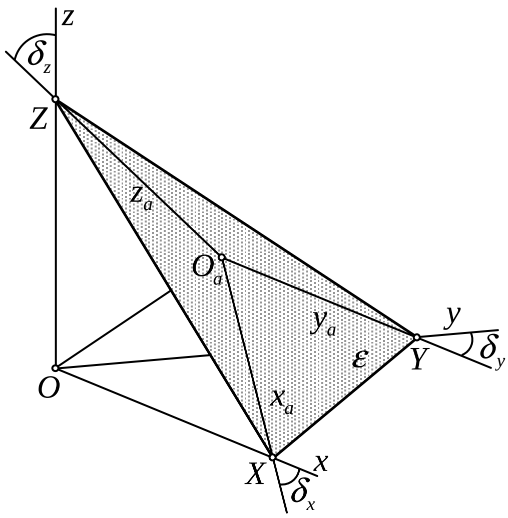
## Pravouhlá ( kolmá ) axonometria

Vstupnými prvkami je pravouhlý trojhran *Oxyz*, priemetňa $\varepsilon$, ktorá pretne hrany *x*, *y*, *z* v bodoch *X*,*Y*,*Z*. K získaniu axonometrie útvaru s dobrou názornosťou je výhodné zvoliť smer premietania kolmý na priemetňu $\varepsilon$ t.j. odchýlka $\varphi = \measuredangle s, \varepsilon = 90°$. Metóda axonometrie pre túto voľbu uhla sa nazýva ***pravouhlá (kolmá,ortogonálna) axonometria***.

Pre niektorých používateľov nemusí byť dôležité poznať zadanie tejto zobrazovacej metódy v nákresni, ale potrebuje na základe určitých požiadaviek umiestniť túto priemetňu $\varepsilon$ vzhľadom na pravouhlý trojhran *Oxyz* a potom následne zrealizovať kolmé premietanie. Z týchto dôvodov uvedieme viac prístupov k jednoznačnému určeniu kolmej axonometrie. Jednotlivé prístupy sú podrobne spracované v [Kr,Kl], v tomto texte je urobený prehľad a uvedené sú numerické vyjadrenia, s ktorými sa následne pracuje.

1. **Voľba priemetne**

• Označme $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ uhly priemetne $\varepsilon$ s hranami *x*, *y*, *z* pravouhlého trojhranu *Oxyz* .




V pravouhlej axonometrii priemetňa $\varepsilon$ vytvára s osami trojhranu ostré uhly $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ práve vtedy keď:

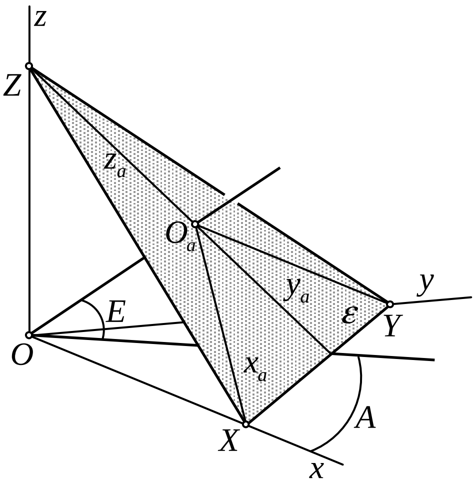
$$\cos^2\delta_x + \cos^2\delta_y + \cos^2\delta_z = 2 \qquad (1)$$

Pre praktické aplikácie je výhodné zo vzťahu (1) určiť, že pre pravouhlú axonometriu je dostatočná podmienka, ak súčet ľubovoľnej dvojice uhlov je ostrý uhol:

$$\delta_x + \delta_y < 90°, \delta_x + \delta_z < 90°, \delta_y + \delta_z < 90° \qquad (2)$$

To znamená, že pri konkrétnom návrhu polohy priemetne $\varepsilon$ zadávajú sa len dva uhly pri splnení podmienky (2). Z praktických skúseností k vytváraniu realistických priemetov útvarov odporúča sa výber uhla $\delta_z$ < 20° [Kl].

• Parametre otočení: určujú sa pomocou uhlov *A* – azimut, *E* – elevácia (názvy z kartografie).

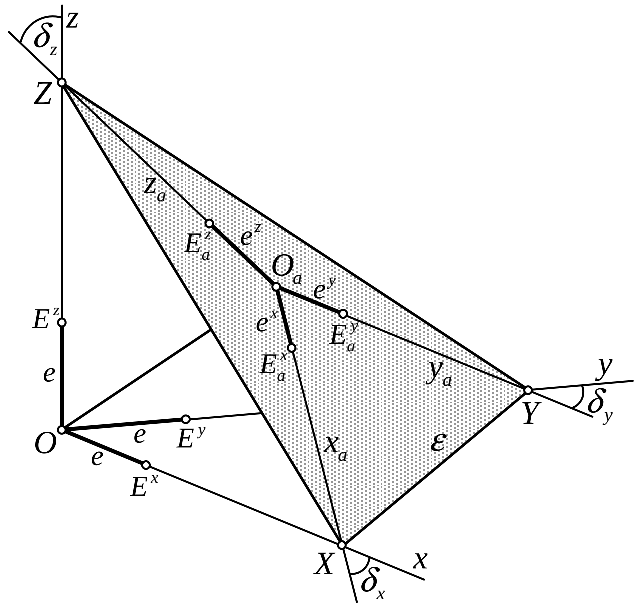



Nadväznosť na uhly $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ možno zapísať : $E = \delta_z$, $\cos A = \dfrac{\sin \delta_x}{\cos \delta_z}$

Potom pre otočenia: $\theta_z = 180° + A$, $\theta_x = 90° - \delta_z$.

2. **Určenie v priemetni**

• Pre axonometrické jednotky platí: $e^x = e.\cos \delta_x, e^y = e.\cos \delta_y, e^z = e.\cos \delta_z$.




Potom pre koeficienty skrátenia $u = \cos \delta_x, v = \cos \delta_y, w = \cos \delta_z$ v pravouhlej axonometrii platí:

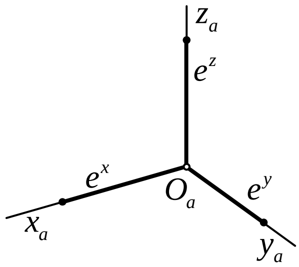
$u^2 + v^2 + w^2 = 2$ resp. $u^2 + v^2 > w^2$, $u^2 + w^2 > v^2$, $v^2 + w^2 > u^2$,

ktoré považujeme za trojuholníkové nerovnosti.

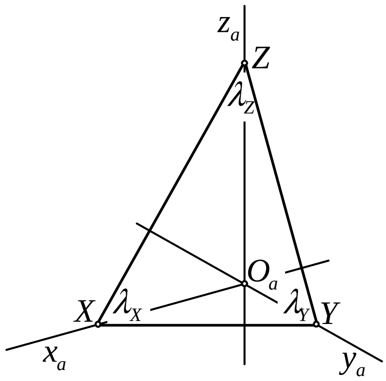
• Každý trojuholník, ktorý je podobný trojuholníku so stranami dĺžok $u^2$, $v^2$, $w^2$ nazývame trojuholník skrátenia pravouhlej axonometrie. Využitím trojuholníka skrátenia ( podrobný postup [Kl]) vieme určiť koeficienty skrátenia $u$, $v$, $w$ pomocou uhlov medzi axonometrickými súradnicovými osami: $\xi = \sphericalangle y_a z_a, \eta = \sphericalangle x_a z_a, \zeta = \sphericalangle x_a y_a$

$$u^2 = \frac{-\cos \xi}{\sin \eta \sin \varsigma}, \quad v^2 = \frac{-\cos \eta}{\sin \xi \sin \varsigma}, \quad w^2 = \frac{-\cos \varsigma}{\sin \xi \sin \eta}$$

Znamienko “-„ v čitateli je kvôli tupým uhlom $\xi$, $\eta$, $\zeta$ a pri voľbe $e = 1$ dostaneme $e^x = u$, $e^y = v$, $e^z = w$.




- Nech poznáme axonometrický trojuholník *XYZ*, potom jeho výšky sú axonometrické súradnicové osi $x_a, y_a, z_a$ a jeho vnútorné uhly $\lambda_X, \lambda_Y, \lambda_Z$ pri vrcholoch *X,Y,Z* vypočítame pomocou kosínovej vety.




Uhly $\xi$, $\eta$ a $\zeta$ medzi axonometrickými súradnicovými osami $y_a,z_a$ , $x_a,z_a$ a $x_a,y_a$ určíme:
$\xi = 180° - \lambda_X, \eta = 180° - \lambda_Y, \zeta = 360° - \xi - \eta$.

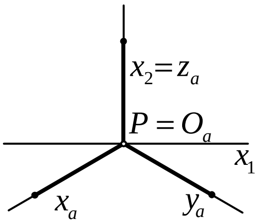
Príklad: Ilustrácia uvedených súvislostí medzi jednotlivými zadaniami pravouhlej axonometrie. Priemetňa $\varepsilon$ vytvára zhodné uhly s hranami trojhranu *Oxyz* potom :

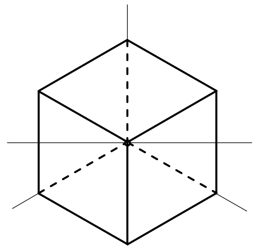
1. • $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta = 35°15'47''$
   • $E = 35°15'47'', A = 45°$
2. • $e^x = e^y = e^z = 0.816 \approx 0.82$ ( $u$: $v$ : $w$ = 1:1:1)
   • $\xi = \eta = \zeta = 120°$
   • rovnostranný axonometrický trojuholník *XYZ*.

Pri syntetickom prístupe k tejto zobrazovacej metóde je väčšinou pravouhlá axonometria určená v priemetni pomocou axonometrického trojuholníka *XYZ* alebo axonometrickým osovým krížom $O_a x_a y_a z_a$. V pravouhlej axonometrii nemôžeme zvoliť axonometrické jednotky ľubovoľne. Je nutné ich vyčísliť. Ak používateľ sa chce vyhnúť tomuto vyčísľovaniu môže použiť tieto odporúčané hodnoty pre pravouhlú axonometriu a to izometriu, dimetriu a trimetriu:

# Pravouhlá izometria

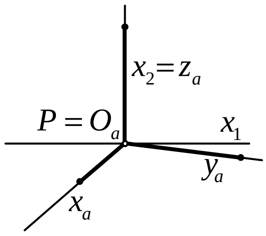
$\xi = 120°$ $\eta = 120°$ $e^x = 0.82$ $e^y = 0.82$ $e^z = 0.82$

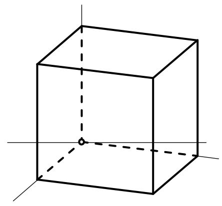


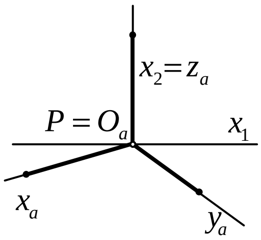
## Pravouhlá dimetria

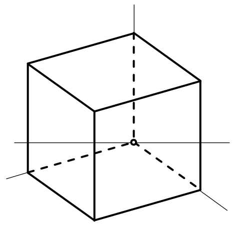
- $\xi = 97°10'$ $\eta = 131°25'$ $e^x = 0.47$ $e^y = 0.94$ $e^z = 0.94$



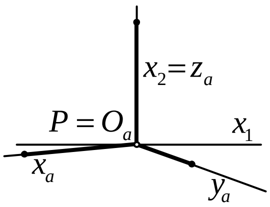
- $\xi = 126°50'$ $\eta = 106°20'$ $e^x = 0.88$ $e^y = 0.66$ $e^z = 0.88$

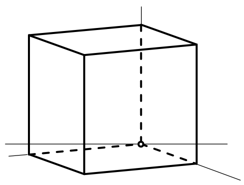


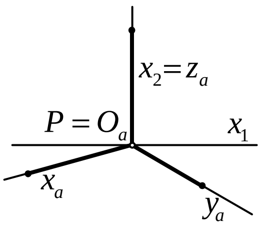
## Pravouhlá trimetria

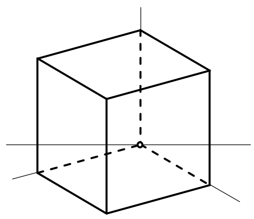
- $\xi = 110°$ $\eta = 95°$ $e^x = 0.9$ $e^y = 0.47$ $e^z = 0.98$



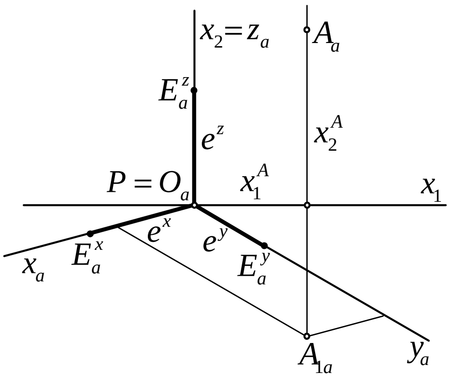
- $\xi = 120°$ $\eta = 105°$ $e^x = 0.86$ $e^y = 0.65$ $e^z = 0.92$



## Zobrazovacia metóda : Axonometria -analytické vyjadrenie.

V nákresni so súradnicovou sústavou $Px_1x_2$ sme každú axonometriu reprezentovali axonometrickou súradnicovou sústavou $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$ t.j. uhlami $\xi$ , $\eta$ a axonometrickými jednotkami $e^x, e^y, e^z$ .




Nech bod $A \in E^3$ má súradnice $A(x^A, y^A, z^A)$ a jeho pôdorys $A_1(x^A, y^A, 0)$ . V axonometrii $\phi : E^3 \to \varepsilon \times \varepsilon$ je obrazom bodov $A$, $A_1$ usporiadaná dvojica bodov $(A_a, A_{1a})$ , pre ktorú $A_aA_{1a} \parallel z_a$ . Vzhľadom na axonometrickú súradnicovú sústavu $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$ majú body $A_{1a}$, $A_a$ súradnice $A_{1a}(x^Ae^x, y^Ae^y, 0)$ , $A_a(x^Ae^x, y^Ae^y, z^Ae^z)$ .

Vyčíslime súradnice bodu $\boldsymbol{A_a}$ $(x_1^A, x_2^A)$ vzhľadom na súradnicovú sústavu nákresne $Px_1x_2$.

Platí:

$$x_1^A = y^Ae^y\cos(\xi - 90°) - x^Ae^x\cos(\eta - 90°)$$
$$x_2^A = z^Ae^z - x^Ae^x\sin(\eta - 90°) - y^Ae^y\sin(\xi - 90°)$$

Potom zápis v homogénnych súradniciach pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^x\cos(\eta - 90°) & -e^x\sin(\eta - 90°) & 0 & 0 \\ e^y\cos(\xi - 90°) & -e^y\sin(\xi - 90°) & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde označenie konkrétneho bodu je vynechané a ostatné parametre zadáva používateľ podľa výberu axonometrie.


Literatúra

[Kl] Klapka, J.: Deskriptivní geometrie,VTN,Praha 1951

[Kr] Kraemer,E.: Zobrazovací metody 2, SPN Praha 1991