Aproximačné splajnové krivky

ZLOŽENÉ BEZIEROVE KRIVKY

Opis krivky zložitého tvaru (s veľkým počtom riadiacich bodov) si vyžaduje Bezierovu krivku vysokého stupňa, čo je nevýhodné najmä z numerických dôvodov a navyše často jednoduchý Bezierov oblúk nespĺňa požiadavky "dobrej" aproximácie riadiaceho polygónu. Riešením môžu byť zložené Bezierove krivky, ktoré sú vytvorené zo segmentov jednoduchých Bezierových oblúkov, v našom prípade Bezierových kubík, pri splnení podmienok ich hladkého spojenia – "zošitia".

Nech ${}^0S$ je segment Bezierovej krivky 3° s riadiacimi bodmi ${}^0\mathbf{V}_0, {}^0\mathbf{V}_1, {}^0\mathbf{V}_2, {}^0\mathbf{V}_3$:

$${}^0S: \ {}^0\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\,{}^0\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle .$$

Úlohou je na túto krivku ${}^0S$ hladko napojiť inú Bezierovu krivku 3°:

$${}^1S: \ {}^1\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\,{}^1\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

ktorej riadiace body budú ${}^1\mathbf{V}_0, {}^1\mathbf{V}_1, {}^1\mathbf{V}_2, {}^1\mathbf{V}_3$. Tieto riadiace body ${}^1\mathbf{V}_0, {}^1\mathbf{V}_1, {}^1\mathbf{V}_2, {}^1\mathbf{V}_3$ vyčíslime a to na základe podmienok **geometrickej spojitosti**:

(1°) geometrická spojitosť 0. rádu **G^0-spojitosť** (polohová spojitosť):

$${}^1\mathbf{b}(0) = {}^0\mathbf{b}(1) \iff {}^1\mathbf{V}_0 = {}^0\mathbf{V}_3$$

(2°) geometrická spojitosť 1.rádu **G^1-spojitosť** (dotyčnicová spojitosť):

$${}^1\mathbf{b}'(0) = \beta 1\, {}^0\mathbf{b}'(1),\ \beta 1 > 0 \iff {}^1\mathbf{V}_1 = {}^0\mathbf{V}_3 + \beta 1 ({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2)$$

Bod ${}^1\mathbf{V}_1$ je bodom priamky ${}^0\mathbf{V}_2{}^0\mathbf{V}_3$.

(3°) geometrická spojitosť 2.rádu **G^2-spojitosť** (krivosťová spojitosť):

$${}^1\mathbf{b}''(0) = \beta 1^2\, {}^0\mathbf{b}''(1) + \beta 2\, {}^0\mathbf{b}'(1) \iff$$

$${}^1\mathbf{V}_2 = \beta 1^2\, {}^0\mathbf{V}_1 + \left(-2\beta 1 - 2\beta 1^2 - \frac{1}{2}\beta 2 \right) {}^0\mathbf{V}_2 + \left(1 + 2\beta 1 + \beta 1^2 + \frac{1}{2}\beta 2 \right) {}^0\mathbf{V}_3$$

Riadiaci bod ${}^1\mathbf{V}_2$ je určený pomocou bodov ${}^0\mathbf{V}_1, {}^0\mathbf{V}_2, {}^0\mathbf{V}_3$.

Teda pri zabezpečení geometrickej spojitosti 2.rádu zostáva nám voľba jedného riadiaceho bodu a to ${}^1\mathbf{V}_3$ pre napájaný Bezierov segment ${}^1\mathbf{b}(t)$.

Je pravda, že možnosť voľby parametrov $\beta 1$, $\beta 2$ ponúka modelovať krivku najmä v okolí napojenia dvoch segmentov. Pri praktických aplikáciách sa siaha k "tvrdšej" požiadavke a tou je **parametrická spojitosť** t.j. $\beta 1 = 1$, $\beta 2 = 0$.

(1°°) parametrická spojitosť 0. rádu **C^0-spojitosť** :

$${}^1\mathbf{b}(0) = {}^0\mathbf{b}(1) \iff {}^1\mathbf{V}_0 = {}^0\mathbf{V}_3$$

(2°°) parametrická spojitosť 1.rádu **C^1-spojitosť** :

$${}^1\mathbf{b}'(0) = {}^0\mathbf{b}'(1) \iff {}^1\mathbf{V}_1 = {}^0\mathbf{V}_3 + ({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2) \iff {}^0\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}({}^1\mathbf{V}_1 + {}^0\mathbf{V}_2)$$

Bod ${}^0\mathbf{V}_3$ je stred úsečky ${}^0\mathbf{V}_2{}^1\mathbf{V}_1$.

(3°°) parametrická spojitosť 2.rádu **C^2-spojitosť** :

$${}^1\mathbf{b}''(0) = {}^0\mathbf{b}''(1) \iff {}^1\mathbf{V}_2 = {}^0\mathbf{V}_1 + 4({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2)$$

Riadiaci bod ${}^1\mathbf{V}_2$ leží na priamke prechádzajúcej bodom ${}^0\mathbf{V}_1$ a rovnobežnej s priamkou ${}^0\mathbf{V}_2{}^0\mathbf{V}_3$.

ČIASTKOVÝ BEZIEROV SPLAJN
SPLAJN PO ČASTIACH BEZIEROV

Teraz keď poznáme postup vyčísľovania vrcholov riadiacich polygónov pre Bezierove krivky 3°, môžeme prejsť k splajnom, ktoré budú vytvorené zo segmentov Bezierovych kubík.

Splajnová krivka $S = S(u)$ je spojitý obraz systému intervalov definovaných postupnosťou $u_0 < u_1 < .. < u_L$ do priestoru E(E^2, E^3) taký, že každý z intervalov $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$, i = 0,1,..,L-1, sa zobrazí na Bezierovu krivku 3°.

Prvky postupnosti $\{u_i\}_{i=0}^{L}$ sú uzly a každej hodnote $u \in \langle u_0, u_L \rangle$ prislúcha bod $S(u)$ na splajne. Parameter u sa nazýva globálny parameter. Okrem globálneho parametra možno bod $S(u)$ opísať aj pomocou lokálneho parametra $t \in \langle 0,1 \rangle$ t.j. ku každému $u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle$ existuje $t \in \langle 0,1 \rangle$, ktorý získame $t = \dfrac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \dfrac{u - u_i}{\Delta_i}$.

Ak pracujeme s celým splajnom, tak je výhodnejšie používať globálny parameter $u \in \langle u_0, u_L \rangle$. Naopak, ak pracujeme len s niektorým jeho segmentom tak je výhodnejšie pracovať s lokálnym parametrom. Budeme používať označenie $\mathbf{s}(u) = {}^i\,\mathbf{s}(t)$.

Lokálne súradnice sú výhodné pri deriváciách:

1. derivácia $\quad \dfrac{d\mathbf{s}(u)}{du} = \dfrac{d\,{}^i\mathbf{s}(t)}{dt}\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{\Delta_i}\dfrac{d\,{}^i\mathbf{s}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\Delta_i}\,{}^i\mathbf{s}'(t)$

2. derivácia $\quad \dfrac{d^2\mathbf{s}(u)}{du^2} = (\dfrac{1}{\Delta_i})^2\ {}^i\mathbf{s}''(t)$

Body $\mathbf{s}(u_{i+1}) = {}^i\,\mathbf{s}(1) = {}^{i+1}\,\mathbf{s}(0)$, i= 0,..,L-2 , sa nazývajú spojovacie body , krátko spoje na Bezierovom splajne.

Súhrn Bezierovych riadiacich polygónov všetkých segmentov sa nazýva čiastkový Bezierov polygón.

Teraz bude úlohou určiť – vypočítať vrcholy riadiacich polygónov pre každý segment tak, aby v spojoch boli splnené požiadavky na spojitosť výslednej krivky – splajnu.

Nech sú dané dve Bezierove kubiky:

${}^0S$: ${}^0\mathbf{b}(u) = {}^0\mathbf{b}\,(\mathbf{V}_0\,\mathbf{V}_1\,\mathbf{V}_2\,\mathbf{V}_3)$, $\quad u \in \langle u_0, u_1 \rangle$

${}^1S$: ${}^1\mathbf{b}(u) = {}^1\mathbf{b}\,(\mathbf{V}_3\,\mathbf{V}_4\,\mathbf{V}_5\,\mathbf{V}_6)$, $\quad u \in \langle u_1, u_2 \rangle$, $\ u_0 < u_1 < u_2$

C^0 –spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in \langle u_0, u_2 \rangle$, je v bode $u = u_1$ C^0 -spojitá $\Leftrightarrow$

$${}^0\mathbf{s}(u)\big|_{u=u_1} = {}^1\mathbf{s}(u)\big|_{u=u_1} \ \Leftrightarrow\ {}^0\mathbf{s}(t)\big|_{t=1} = {}^1\mathbf{s}(t)\big|_{t=0} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3$$

C^1 –spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in \langle u_0, u_2 \rangle$, je v bode $u = u_1$ C^1 -spojitá $\Leftrightarrow$

$$\frac{d\,{}^0\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1}=\frac{d\,{}^1\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1}\Leftrightarrow\frac{1}{\Delta_0}\,{}^0\mathbf{s}'(t)\big|_{t=1}=\frac{1}{\Delta_1}\,{}^1\mathbf{s}'(t)\big|_{t=0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\Delta_0}3(\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2)=\frac{1}{\Delta_1}3(\mathbf{V}_4-\mathbf{V}_3)\Leftrightarrow\mathbf{V}_3=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_2+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_4\,.$$

Túto vlastnosť môžeme interpretovať geometricky : riadiace body $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$ musia byť kolineárne a musí platiť deliaci pomer: *ratio*($\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$)=$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$. (Ak $\Delta_0=\Delta_1=1$, tak bod $\mathbf{V}_3$ je stred úsečky $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_4$).

C^2 -spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u)={}^0S\cup{}^1S,\ u\in\langle u_0,u_2\rangle$, je v bode $u=u_1$ C^2 -spojitá (C^1 +spojitosť 2.derivácie) spojitosť 2.derivácie

$$\frac{d^{\,20}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1}=\frac{d^{\,21}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^{2\,0}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=1}=\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^{2\,1}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=0}$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3-2\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1)=\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3-2\mathbf{V}_4+\mathbf{V}_5)$$

Po algebrických úpravách dostaneme:

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2=\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4-\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5\qquad\text{(X)}$$

Každá strana vyjadrenia (X) určuje bod. Pre ľavú stranu je to bod $\mathbf{D}_-$ a pravú stranu $\mathbf{D}_+$ t.j.:

$$\mathbf{D}_-=-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2\quad\text{a}\quad\mathbf{D}_+=\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4-\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5\qquad\text{(XX)}$$

Podmienka parametrickej spojitosti 2.rádu požaduje totožnosť bodov $\mathbf{D}_-=\mathbf{D}_+$, ktorý nazveme $\mathbf{D}$ a úpravou (XX) dostaneme

$$\mathbf{V}_2=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{D}\ \text{ a }\ \mathbf{V}_4=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{D}+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_5\,.$$

Navyše platia deliace pomery: *ratio*($\mathbf{V}_1$ $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{D}$) = *ratio*($\mathbf{D}\mathbf{V}_4$ $\mathbf{V}_5$) = $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Teda krivka $\mathbf{s}(u)={}^0S\cup{}^1S$ je v bode $u=u_1$ C^2 -spojitá $\Leftrightarrow$ ak je

1.C^1-spojitá $\Leftrightarrow$ $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$ sú kolineárne a *ratio*($\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$) = $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$

2. existuje bod $\mathbf{D}$ tak, že platí: *ratio*($\mathbf{V}_1$ $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{D}$) = *ratio*($\mathbf{D}\mathbf{V}_4$ $\mathbf{V}_5$) = $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Vyčísľovacie algoritmy

- Najskôr k zadanej postupnosti bodov určíme riadiace body pre Bezierove segmenty podľa požiadaviek na rád spojitosti, ktoré označíme $\mathbf{V}_0,\ldots,\mathbf{V}_n$.
- Následne každý segment Bezierovej kubiky určený štvoricou riadiacich bodov je vyčíslený Casteljau algoritmom (podrobnejšie spracované vo Farinovi).

B-SPLAJNOVÉ KRIVKY
C^2-SPLAJN APROXIMAČNÝ

Pri B-splajnových krivkách sa konštruujú oveľa flexibilnejšie, po častiach polynomické funkcie, nazývané B-splajnové funkcie: „B“-basis spline. Je známe, že prvý pracoval s B-splajnovými funkciami **Lobačevskij** (19.stor). V roku 1946 **Schoenberg** využil B-splajnové funkcie k vyhladzovaniu štatistických údajov a odštartoval modernú teóriu aproximácie splajnami. Významnou osobnosťou v teórii B-splajnov bol **Riesenfeld** a praktikom **Carl de Boor** (1972).

B-splajnová krivka je aproximačná krivka vzhľadom na riadiaci polygón. Navyše okrem riadiacich bodov sa pracuje aj s uzlami, ktoré ponúkajú dodatočné modifikácie tvaru krivky.

Kubická B-splajnová krivka

Na úvod o B-splajnových krivkách sa zameriame na konštrukciu B-splajnových kubických kriviek aplikáciou požiadaviek na spojitosť v spoji dvoch segmentov. Základný prístup konštrukcie B-splajnovej krivky ignoruje uzly, neskôr opíšeme konštrukciu uzlov a ich vplyv pri modelovaní B-splajnovej krivky.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne. Každý segment kubického splajnu je zviazaný so štyrmi riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ a štyrmi zmiešavacími funkciami $N_{j,3}(t)$:

$$^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$$

kde $N_{j,3}(t) = a_j + b_j t + c_j t^2 + d_j t^3$, j= 0,1,2,3, sú polynómy 3°.

Koeficienty a_j, b_j, c_j, d_j, j= 0,1,2,3, určíme na základe požiadaviek parametrickej spojitosti v spoji segmentov $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j}$ a $^{i+1}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j+1}$:

- parametrická spojitosť **C^0-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}(0) = {}^{i}\mathbf{s}(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

- parametrická spojitosť **C^1-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}'(0) = {}^{i}\mathbf{s}'(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}'(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}'(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

- parametrická spojitosť **C^2-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}''(0) = {}^{i}\mathbf{s}''(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}''(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}''(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

Z týchto podmienok získame 15 rovníc pre 16 neznámych a_j, b_j, c_j, d_j, j= 0,1,2,3. Vieme, že i-ty segment $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j}$ je zapísaný ako kombinácia bodov a funkcií, pre ktoré musí platiť

- rozklad jednotky: $\sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t) = 1$, čím získame 16. rovnicu.

Riešením sú koeficienty a_j, b_j, c_j, d_j, j= 0,1,2,3:

a_0=1/6 b_0= - 1/2 c_0= 1/2 d_0= -1/6; a_1=2/3 b_1= 0 c_1= -1 d_1= 1/2

a_2=1/6 b_2= 1/2 c_2= 1/2 d_2= -1/2; a_3=0 b_3= 0 c_3= 0 d_3= 1/6.

Zmiešavacie funkcie: $N_{03}(t) = \frac{1}{6}(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$ $\quad N_{13}(t) = \frac{1}{6}(4 - 6t^2 + 3t^3)$

$$N_{23}(t) = \frac{1}{6}(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3) \qquad N_{33}(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

Ich zápis v monomiálnej báze:

$$\begin{bmatrix} N_{03}(t) & N_{13}(t) & N_{23}(t) & N_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

K maticovému vyjadreniu B-splajnovej krivky použijeme zápis:

$$^{i}\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \\ \mathbf{V}_{i+3} \end{bmatrix} = T \,.\, M_{BS} \,.\, G_{BS}$$

Kde matica M_{BS} je maticou koeficientov B-splajnovej krivky 3°.

Vlastnosti segmentu: $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

- <u>Krajné body segmentu</u> :

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_i + 4\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}) = \mathbf{V}_{i+1} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+2}}{2} - \mathbf{V}_{i+1})$ a je antiťažisko trojuholníka $V_i\ V_{i+1}\ V_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}(1) = \mathbf{V}_{i+2} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+3}}{2} - \mathbf{V}_{i+2})$ a je antiťažisko trojuholníka $V_{i+1}\ V_{i+2}\ V_{i+3}$,

- Vektor 1.derivácie segmentu: ${}^{i}\mathbf{s}'(t) = \sum_{j}^{3} N'_{j,3}(t)\ \mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}'(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}'(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+3} - \mathbf{V}_{i+1})$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$.

- Vektor 2.derivácie segmentu: ${}^{i}\mathbf{s}''(t) = \sum_{j}^{3} N''_{j,3}(t)\ \mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}''(0) = (\mathbf{V}_i - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}) = (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1}) + (\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1})$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a teda vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_M$ stred $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}''(1) = (\mathbf{V}_{i+1} - 2\mathbf{V}_{i+2} + \mathbf{V}_{i+3}) = (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i+2}) + (\mathbf{V}_{i+3} - \mathbf{V}_{i+2})$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\mathbf{V}_{i+3}\mathbf{W}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_N$, $\mathbf{V}_N$ stred $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$