I KÓTOVANÉ ZOBRAZENIE

Zita Sklenáriková

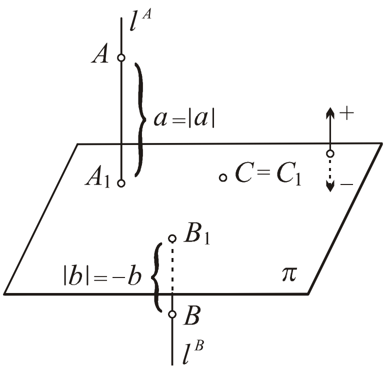
1 Základné pojmy, obraz bodu

Prvou zobrazovacou metódou, ktorou sa budeme zaoberať, je *kótované zobrazenie*. Všetky úvahy sa budú robiť v trojrozmernom euklidovskom priestore $\boldsymbol{E}_3$[1]. Základnou zložkou kótovaného zobrazenia je kolmé premietanie na ľubovoľnú rovinu π priestoru $\boldsymbol{E}_3$ (priemetňa).

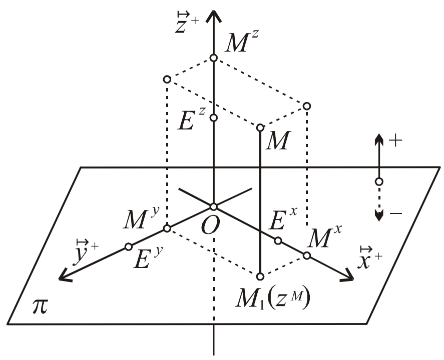
Zvoľme si ľubovoľnú rovinu π euklidovského priestoru. Najprv si uvedieme pojem *orientovanej vzdialenosti* ľubovoľného bodu priestoru od tejto roviny. Rovina π rozdeľuje priestor $\boldsymbol{E}_3$ na dva polpriestory (π je *hraničnou* rovinou alebo *hranicou* oboch polpriestorov). Ľubovoľný z nich nazvime kladným polpriestorom; druhý z polpriestorov (opačný k prvému) bude záporným polpriestorom s hranicou v tej istej rovine. Na obr. 1 má príslušný kladný, resp. záporný polpriestor označenie „ + “, resp. „ – “.

Definícia 1.1

Orientovanou vzdialenosťou ľubovoľného *bodu A* priestoru $\boldsymbol{E}_3$ (v pevne zvolenej jednotke *j* merania) *od priemetne* π nazývame reálne číslo a, ktorého absolútna hodnota sa rovná vzdialenosti bodu A od priemetne π a ktoré je kladné, resp. záporné práve vtedy, keď je bod A bodom kladného, resp. záporného polpriestoru s hranicou π. Reálne číslo a sa nazýva *kóta bodu A*.



Obr. 1



Obr. 2

Poznámka 1.1

Na obrázku 1 je bod A bodom kladného polpriestoru, bod B bodom záporného polpriestoru s hranicou π a bod C leží v rovine π. Premietacie priamky bodov A, B sú priamky l^A, l^B ($A \in l^A \wedge l^A \perp \pi$; $B \in l^B \wedge l^B \perp \pi$). Pravouhlé (kolmé) priemety bodov A, B, C sú označené dolným indexom „1“ a príslušné orientované vzdialenosti týchto bodov od roviny π sú označené a, b, c. Podľa definície je zrejmé: $a = |a|$, $-b = |b|$, $c = 0$ ($|a| = |A, \pi|$, $|b| = |B, \pi|$).

Uvažujme o zobrazení f, ktoré každému bodu M priestoru $\boldsymbol{E}_3$ priradí usporiadanú dvojicu (M_1, m), kde M_1 je kolmý priemet bodu M do zvolenej roviny π a reálne číslo m je kóta bodu

[1] Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$ nad poľom $\boldsymbol{R}$ reálnych čísel sa nazýva stereometria. Potrebné základy stereometrie vrátane pojmu rovnobežného premietania priestoru na rovinu možno nájsť v [1].

M. Platí: $A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B)$. Obrátene, každý bod priestoru je takouto dvojicou jednoznačne určený (dôkaz sa ponecháva čitateľovi ako cvičenie). Platí teda:

Veta 1.1

Zobrazenie f, ktoré každému bodu M trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$ priradí usporiadanú dvojicu prvkov (pravouhlý priemet M_1 bodu M do priemetne π, kóta m bodu M) ($f : \boldsymbol{E_3} \to \pi \times \boldsymbol{R}$, $f : M \mapsto (M_1, m)$) je bijektívne.

Dôsledok 1.1. Zobrazenie f je zobrazovacou metódou.

Definícia 1.2

Zobrazovaciu metódu f nazývame *metódou kótovaného zobrazenia* alebo aj *kótované zobrazenie* (s priemetňou π).

Poznámka 1.2

a) Kótované zobrazenie je široko používanou metódou zobrazovania objektov technickej praxe (stavebníctvo, strojárenstvo, geodézia a i.) pri konštrukciách pôdorysov objektov (plány budov, terénu, súčiastok ap.). Pri zobrazovaní takýchto objektov si musíme zvoliť pomocnú rovinu, tzv. nákresňu, v ktorej budeme rysovať kolmé priemety význačných bodov zobrazovaných objektov v určitom vhodnom zmenšení alebo pri veľmi malých objektoch i zväčšení. Obrazy priemetov útvarov v nákresni teda nie sú zhodné s originálmi (t. j. kolmými priemetmi do roviny π) – sú originálom v rovine π len podobné.[2] Túto transformáciu budeme v riešení úloh ďalej zanedbávať; pri voľbe objektov stotožníme priemetňu s nákresňou a budeme predpokladať, že podobnostnej transformácii boli podrobené už zobrazované priestorové objekty.

b) V záujme jednotného zadania niektorých zložitejších úloh budeme určujúce prvky (body) zobrazovaných útvarov zadávať ich súradnicami vo vhodne zvolenej ortonormálnej súradnicovej sústave s bázou $\langle O; E^x,\ E^y,\ E^z \rangle$ (bod O je súradnicový začiatok a body E^x, resp. E^y, resp. E^z sú jednotkové body kladných polpriamok súradnicových osí x, resp. y, resp. z so začiatkom O, teda platí: $OE^x \cong OE^y \cong OE^z$, $OE^x \perp OE^y \perp OE^z \perp OE^x$.[3] V kótovanom zobrazení s priemetňou π si bázu $\langle O; E^x,\ E^y,\ E^z \rangle$ budeme voliť tak, aby priemetňa π bola súradnicovou rovinou $\overset{\leftrightarrow}{xy}$ a aby kladná polpriamka súradnicovej osi z ležala v príslušnom kladnom polpriestore s hranicou π (obr. 2)).

c) Pri spomenutej voľbe bázy súradnicovej sústavy orientovaná vzdialenosť bodu M od roviny π sa rovná kóte bodu M (t. j. $m = z^M$). Preto všade ďalej budeme pre kótu ľubovoľného bodu X používať označenie z^X. V nákresni budeme kótu bodu pripisovať do zátvorky vpravo od pravouhlého priemetu bodu (napríklad k priemetu bodu M sa v nákresni napíše $M_1\,(z^M)$). Bod s označením $M_1(z^M)$ budeme nazývať *okótovaný priemet bodu M.*

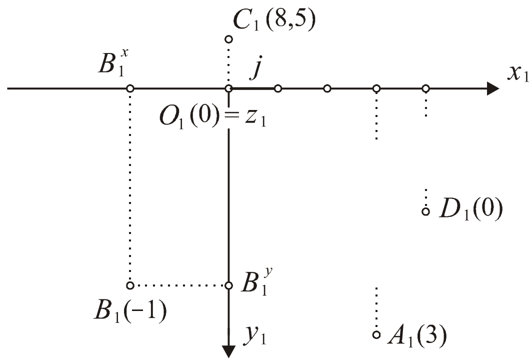
---

[2] V tom zmysle, že existuje súhlasné podobnostné zobrazenie, ktoré zobrazuje útvary priemetne do útvarov nákresne ([5] Podobnostné zobrazenia, par. 8.2).

[3] Pojem súradnicovej sústavy sa považuje za intuitívne jasný zo stredoškolského kurzu analytickej geometrie a bude exaktne vysvetlený v druhom semestri štúdia v predmete Geometria 1. Pripomenieme len, že pod súradnicovou sústavou danou bázou $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$ (s vlastnosťami uvedenými v texte) rozumieme bijektívne bodové zobrazenie $\varphi : E_3 \to R \times R \times R$, ktoré každému bodu M priestoru priradí usporiadanú trojicu reálnych čísel (x^M, y^M, z^M) tak, že platí: $x^M = (M^x E^x O)$, $y^M = (M^y E^y O)$, $z^M = (M^z E^z O)$; body M^x, M^y, M^z sú vrcholy tzv. určujúceho rovnobežnostena bodu M na súradnicových osiach x, y, z (pri voľbe ortonormálnej súradnicovej sústavy ide vo všeobecnom prípade o kváder, ktorého jeden vrchol je bod M a steny ním neprechádzajúce ležia v súradnicových rovinách $\overset{\leftrightarrow}{xy}$, $\overset{\leftrightarrow}{yz}$ a $\overset{\leftrightarrow}{xz}$). Výrazy v zátvorkách sú *pomery* usporiadaných trojíc kolineárnych bodov; ide o súradnice bodu M v danej báze. Pojem *pomeru* usporiadanej trojice kolineárnych bodov bol zavedený v stereometrii.

Úloha 1

Zvoľte si v nákresni ľubovoľne súradnicové osi x, y. Označte indexom „1“ pravouhlé priemety súradnicových osí x, y, z. Zostrojte okótované priemety súradnicového začiatku O a bodov A (3j; 5j; 3j), B (– 2j; 4j; – 1j), C (0; – 1j; 8,5j), D (4j; 2,5j; 0). Jednotku miery si zvoľte ľubovoľne (1 cm, 0,5 cm, a pod.). Ktorý z bodov A, B, C, D leží v kladnom/zápornom polpriestore s hranicou π? Skúste si vymodelovať body A, B, C, D. Sú niektoré z priamok $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$ rovnobežné? Ležia body A, B, C, D v jednej rovine? Odôvodnite stereometrickými úvahami (bez výpočtu).



Obr. 3

2 Obraz priamky v kótovanom zobrazení. Sklápanie roviny

V tomto a nasledujúcom paragrafe sa budeme zaoberať zobrazením ďalších základných útvarov – *priamky a roviny* – v metóde kótovaného zobrazenia a definujeme ďalšie dôležité pojmy, ktoré so zobrazením týchto útvarov súvisia. Pripomeňme si, že v každom bodovom zobrazení je obraz geometrického objektu definovaný ako množina obrazov všetkých jeho bodov. V kótovanom zobrazení je preto obrazom útvaru U množina usporiadaných dvojíc (M_1, z^M) pre všetky body M útvaru U. Je zrejmé, že budeme zostrojovať obrazy len tých bodov útvaru, ktorými je tento určený, t. j. bodov, ktorými sú určené všetky ďalšie body zobrazovaného útvaru.

Pravouhlým priemetom priamky je priamka (v prípade priamky, ktorá nie je kolmá na priemetňu) alebo bod (v opačnom prípade). Vzhľadom na určenie priamky [1] je obraz priamky a ($a \not\perp \pi$, $a \nparallel \pi$) určený obrazom dvoch jej navzájom rôznych bodov A, B; každý ďalší bod priamky a je určený alebo kolmým priemetom alebo kótou (obr. 4a). Dourčenie okótovaného priemetu takéhoto bodu si ukážeme po vysvetlení konštrukcie, ktorá sa nazýva *sklápanie roviny* do priemetne alebo do roviny s priemetňou rovnobežnej. V prípade priamky kolmej na priemetňu je obraz priamky určený jej pravouhlým priemetom (na obr. 4b priamka b) a na určenie bodu priamky stačí poznať jeho kótu. V prípade priamky s priemetňou rovnobežnej majú všetky jej body tú istú kótu; kótu ľubovoľného bodu priamky c ($c \parallel \pi$) (obr. 4b) budeme nazývať kótou tejto priamky a zapisovať ju k priemetu priamky (napr. $c_1(z_0)$ znamená, že všetky body priamky c majú kótu rovnajúcu sa číslu $z_0 \in \mathbf{R}$). Každý bod M priamky c je v kótovanom zobrazení určený svojím priemetom M_1.

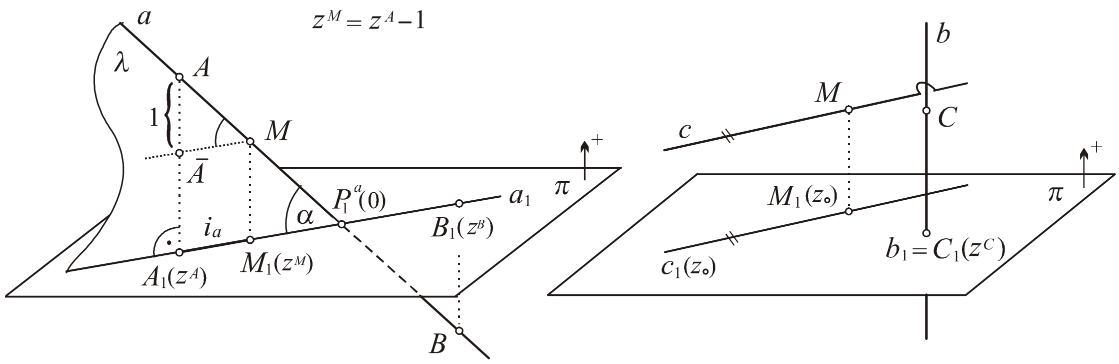
Definícia 2.1

a) Priesečník priamky a ($a \nparallel \pi$) s priemetňou nazývame *stopníkom priamky a* a budeme ho označovať P^a.

b) Nech a ($a \perp \pi$, $a \# \pi$) je ľubovoľná priamka. *Intervalom priamky a* nazývame dĺžku priemetu [4] úsečky incidentnej s priamkou a, pre ktorú absolútna hodnota rozdielu kót jej krajných bodov sa rovná 1. Interval priamky a budeme označovať i_a. Prevrátená hodnota intervalu priamky a sa nazýva *spád priamky a* (označenie s_a). (Obr. 4a)

c) *Stupňovaním priamky* nazývame vyznačenie okótovaných priemetov konečnej podmnožiny bodov priamky, ktorých kóty sú za sebou nasledujúce celé čísla. Priemety týchto bodov tvoria tzv. *stupnicu* danej *priamky*.

d) Veľkosť uhla priamky s priemetňou sa nazýva *odchýlka priamky*.



Obr. 4a, b

Dôsledok 2.1

1. Nech priamka a nie je s priemetňou π rovnobežná, ani na ňu kolmá a uhol α je zhodný s uhlom priamky a s priemetňou ($\alpha \cong \angle a\pi$). Pre interval i_a a spád s_a priamky a platí: $i_a = \operatorname{cotg}|\alpha|$, $s_a = \operatorname{tg}|\alpha|$.[5] (Obr. 4a)

2. Ak pre priamky p, q s intervalmi i_p, i_q platí: $\angle p\pi > \angle q\pi$, tak platí $i_p < i_q$ [6] a $s_p > s_q$.

3. Priamky, ktoré majú s priemetňou zhodné uhly, majú rovnajúce sa intervaly.

Všetky úlohy o priamke (napr. overenie incidencie bodu a priamky, ktoré sú dané okótovanými priemetmi; určenie bodu priamky, ak je daná jeho kóta; určenie intervalu priamky, uhla priamky s priemetňou, atď.) sa v kótovanom zobrazení riešia v premietacej rovine danej priamky (na obr. 4a je to rovina λ ($a \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi$), a to otočením tejto roviny do priemetne alebo do roviny s priemetňou rovnobežnej. Pojem premietacej roviny priamky a všeobecne premietacieho útvaru prislúchajúceho danému geometrickému útvaru U je vysvetlený napr. v [1] (Dodatky, par. 5.2). Konštrukcia otáčania jednej roviny do druhej – ide o zhodnostné zobrazenie medzi dvoma rovinami, ktoré je súčasne perspektívnou afinitou [4] – bude vysvetlená v piatej kapitole tohto textu.

Je dôležité osvojiť si pojmy: *os otáčania* jednej roviny do druhej; *rovina otáčania ľubovoľného bodu M* roviny, ktorá sa otáča; *stred otočenia bodu M*; *polomer* r^M *otočenia bodu M*; *uhol otáčania* jednej roviny do druhej (ide o uhol zhodný s uhlom $\angle MS^M M_o$, kde M je ľubovoľný bod roviny, ktorú otáčame, bod S^M je stredom otáčania bodu M a M_o je otočená poloha bodu M). Uhol otočenia jednej roviny do druhej je alebo uhol zhodný s uhlom oboch rovín alebo s uhlom, ktorý je doplnkovým uhlom k uhlu dvoch rovín do priameho uhla.

---

[4] Pod priemetom útvaru U sa všade ďalej bude rozumieť kolmý priemet útvaru U do roviny π.

[5] Interval/spád priamky je teda nezávislý od výberu bodov A, M priamky, pre ktoré $|z^A - z^M| = 1$.

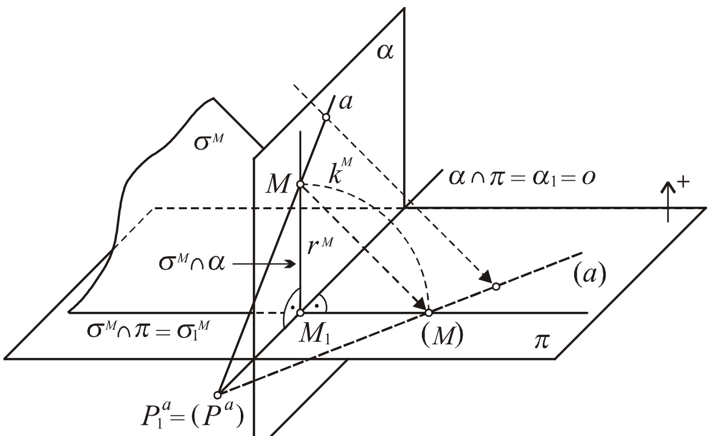
[6] Tieto zápisy čítame „uhol priamky p s priemetňou π je väčší *než* uhol priamky q s priemetňou π“, „interval priamky p je menší *než* interval priamky q“.

Otáčanie (do priemetne alebo úrovne) roviny kolmej na priemetňu má špeciálny názov. Definujme:

Definícia 2.2

Otáčanie roviny α ($\alpha \perp \pi$) (t. j. roviny kolmej na priemetňu) do priemetne π, resp. do ľubovoľnej roviny π' ($\pi' \parallel \pi \wedge z^{\pi'} \neq 0$) sa nazýva *sklápanie roviny* α do priemetne π, resp. *sklápanie roviny* α *do úrovne* π'.[7] [8]

Obrázok 5 ilustruje otočenie premietacej roviny α priamky a ($a \not\perp \pi,\ a \nparallel \pi$) do priemetne π. *Osou otáčania* je priamka o ($o = \alpha \cap \pi$) (vzhľadom na dohodu voľby nákresne v rovine π je $\alpha \cap \pi = \alpha_1$). *Rovina otočenia bodu M* roviny α ($M \notin \alpha \cap \pi$) [9] je rovina σ^M ($M \in \sigma^M \wedge \sigma^M \perp o$) – ide o rovinu kolmú na os otáčania, odkiaľ vyplýva i kolmosť priamok ($\sigma^M \cap \alpha$) a ($\sigma^M \cap \pi$) na priamku o. Priamka $\sigma^M \cap \alpha$ je kolmo premietacia priamka bodu M, preto *stredom otočenia* bodu M je bod M_1 ($M_1 = \sigma^M \cap o$) a priamka $\sigma^M \cap \pi$ je pravouhlým priemetom roviny σ^M do roviny π (kolmosť roviny σ^M na priemetňu je dôsledkom kolmosti tejto roviny na os o otáčania roviny – kritérium kolmosti dvoch rovín), t. j. $\sigma^M \cap \pi = \sigma_1^M$. *Kružnica* k^M *otočenia bodu M* leží v rovine σ^M a $k^M = (M_1;\ r^M)$, kde úsečka $r^M = MM_1$ ($|r^M| = |MM_1| = |z^M|$) je polomer otočenia bodu M. Otočené polohy bodov v sklápaní roviny α budeme nazývať *sklopené polohy bodov* a označovať ľubovoľnou zátvorkou; napr. na obr. 5 je sklopená poloha bodu M v sklopení roviny α označená (M). Analogicky sklopená poloha útvaru U ($U \subset \alpha$) sa bude označovať v tomto sklápaní (U).[10] Platí: $(M) \in k^M \cap \pi = k^M \cap (\sigma^M \cap \pi) = k^M \cap \sigma_1^M$.



Obr. 5

Poznámka 2.1

1. Pri sklápaní roviny α ($\alpha \perp \pi$) sa kladná polrovina roviny α otáča do ľubovoľnej z polrovín priemetne π s hranicou v priamke $(\alpha \cap \pi) = \alpha_1$ a polrovina v zápornom polpriestore do opačnej polroviny. Konštrukcia nezávisí od výberu polroviny priemetne; zvyčajne je výber motivovaný usporiadaním priemetov útvarov v nákresni. Najmä v riešení zložitejších úloh sa

[7] Uhol otočenia roviny je pri sklápaní roviny zhodný s pravým uhlom.

[8] Pod úrovňou všade ďalej budeme rozumieť každú rovinu π' ($\pi' \parallel \pi \wedge z^{\pi'} \neq 0$).

[9] Každý bod osi otáčania je invariantným bodom v danom otočení, t. j. je totožný so svojou otočenou polohou.

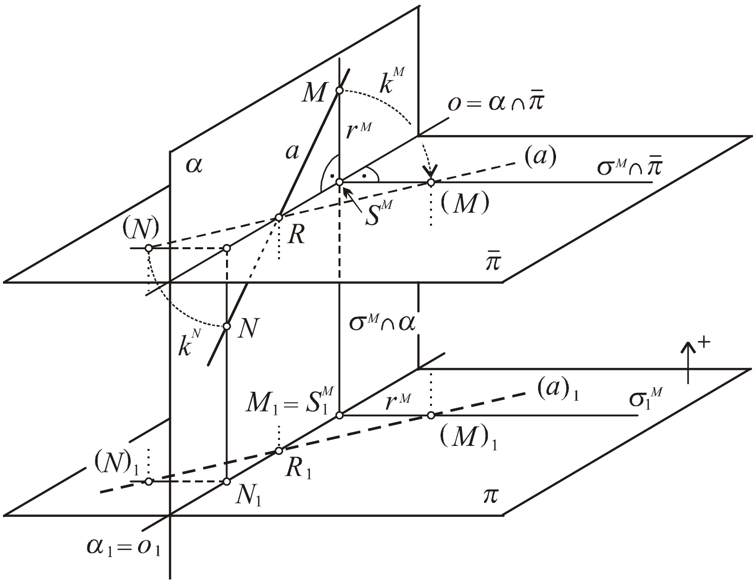
[10] Pri sklápaní inej roviny β ($\beta \neq \alpha$) prechádzajúcej tým istým bodom M musíme použiť iné označenie sklopených polôh, napr. $[M]$ pre bod M (je zrejmé, že $(M) \neq [M]$). Preto **nikdy** nehovoríme „sklopený bod M/sklopený útvar U“ ale „*sklopená poloha bodu M / útvaru U v sklopení roviny α*“ (prirodzene $M \in \alpha, U \subset \alpha$).

budeme usilovať o prehľadnosť konštrukcií, napr. o to, aby sa sklopené polohy útvarov roviny „neprekrývali“ s ďalšími dôležitými konštrukciami.

2. Medzi sklopenými polohami bodov roviny α a originálmi bodov (v priestore) je vzťah perspektívnej afinity s osou $o = \alpha \cap \pi$. Každé otočenie jednej roviny do druhej je totiž rovnobežným premietaním, v ktorom je osnova premietacích priamok kolmá na jednu z rovín súmernosti týchto rovín.[11]

3. Symbolický zápis konštrukcií bude zväčša uvádzaný vedľa obrázka, ktorý ilustruje konštrukciu na obrazoch útvarov v kótovanom zobrazení.

Pred riešením úloh metódou sklápania roviny si ešte vysvetlíme konštrukciu spojenú so sklápaním roviny α ($\alpha \perp \pi$) do úrovne, t. j. do roviny $\bar{\pi}$ $(\bar{\pi} \,//\, \pi \wedge z^{\bar{\pi}} \neq 0)$. Táto metóda sa bude používať pri riešení úloh o útvaroch v premietacej rovine, ktorých body majú veľkú vzdialenosť od priemetne a sklopené polohy týchto bodov by sa na obmedzenú časť nákresne nedostali. Spomenuté úlohy by bolo možné riešiť i voľbou novej priemetne $\bar{\pi}$ $(\bar{\pi} \,//\, \pi)$ tak, aby napríklad obsahovala nejaký bod/body zobrazovaného útvaru. K tomu by stačilo zmeniť kóty všetkých bodov, ktoré určujú daný útvar. O takejto transformácii priemetne zatiaľ nebudeme uvažovať. Sklopené polohy bodov/útvarov do roviny $\bar{\pi}$ budeme označovať tak, ako sklopené polohy bodov v sklápaní roviny α do priemetne, teda v ľubovoľnej zátvorke. Sklopené polohy bodov a príslušné originály majú tie isté vlastnosti, ktoré majú sklopené polohy bodov v sklopení roviny α do priemetne: vo všetkých vzťahoch, ktoré sme vyjadrovali vyššie pre os otáčania roviny α, polomer otočenia bodu, atď. stačí nahradiť rovinu π rovinou $\bar{\pi}$. Teda *osou o otáčania roviny* α je priesečnica rovín α, $\bar{\pi}$; *polomer otočenia bodu M* roviny α ($M \notin o$) je úsečka MS^M (bod $S^M = \sigma^M \cap o$ je stred otáčania bodu M a rovina σ^M je rovina otáčania bodu M kolmá na priamku o). Potom $|r^M| = |M\bar{\pi}| = |z^M - z^{\bar{\pi}}|$ (obr. 6).



Obr. 6

V kótovanom zobrazení nemôžeme priamo zostrojovať sklopené polohy bodov roviny α v jej sklopení do roviny $\bar{\pi}$, ale len *pravouhlé priemety* týchto sklopených polôh do priemetne π. Pretože rovina $\bar{\pi}$ je rovnobežná s priemetňou, sú pravouhlé priemety sklopených polôh útvarov zhodné so samotnými sklopenými polohami, teda rovinné polia (α), $((\alpha))$ a $((\alpha)_1)$ sú

[11] Podrobnejšie vysvetlenie možno nájsť v piatej kapitole, par. 5.1. Jednoduchý dôkaz sa necháva čitateľovi.

navzájom zhodné. (Vonkajšia/vnútorná zátvorka je označenie rovinného poľa/sklopenej polohy množiny všetkých útvarov danej roviny α.) [12]

Pri sklápaní roviny α do úrovne $\overline{\pi}$ sa všetky body M polroviny roviny α, pre ktoré: $z^M > z^{\overline{\pi}}$ otočia do tej istej (ľubovoľne zvolenej) polroviny roviny $\overline{\pi}$ s hranicou v priamke $o = \overline{\pi} \cap \alpha$ a všetky body N ($N \in \alpha \wedge z^N < z^{\overline{\pi}}$) do polroviny k nej opačnej. Na to treba pri konštrukcii *pravouhlých priemetov* sklopených polôh bodov dávať pozor (obr. 6).

Úloha 2.1

Daný je obraz krajných bodov nenulovej úsečky AB v kótovanom zobrazení ($A = (A_1, z^A)$, $B = (B_1, z^B)$). Zostrojte: a) dĺžku úsečky AB; b) uhol zhodný s uhlom priamky a ($a = \overleftrightarrow{AB}$) s priemetňou; c) interval priamky a a vystupňujte dostupnú časť priemetu priamky a. Označte stopník priamky.

Riešenie

I. Ak je priamka a kolmá na priemetňu, tak má zmysel len určenie dĺžky úsečky AB a platí: $|AB| = |z^A - z^B|$. Uhol priamky s priemetňou je zhodný s pravým uhlom. Analogicky v prípade priamky rovnobežnej s priemetňou niet čo konštruovať: uhol priamky s priemetňou je nulový a $|AB| = |A_1B_1|$ ($AB \cong A_1B_1$).

II. Nech priamka a nie je ani kolmá na priemetňu, ani s ňou rovnobežná (obr. 7a, b). V tomto prípade je metódou riešenia úlohy sklápanie premietacej roviny α priamky $a = \overleftrightarrow{AB}$ ($a \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi$). V prvom prípade sklopíme rovinu α do priemetne.

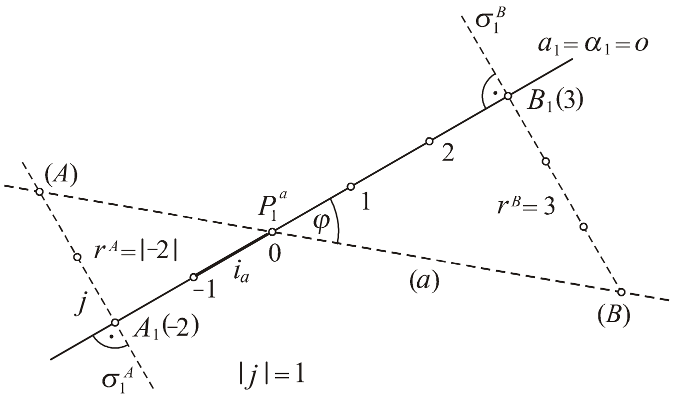
a) Platí: $a_1 = \alpha_1$. Nech je σ^A rovina otáčania bodu A ($A \in \sigma^A \wedge \sigma^A \perp o; o = \alpha \cap \pi = a_1$) [13], t. j. $\sigma_1^A \perp a_1 \wedge A_1 \in \sigma_1^A$. Pre sklopenú polohu bodu A platí: $(A) \in \sigma_1^A \wedge |(A)A_1| = |r^A| = |z^A|$. Bod (A) sme zostrojili v ľubovoľnej z polrovín priemetne s hranicou a_1. Konštrukcia sklopenej polohy bodu je tak jednoduchá, že priemety rovín otáčania ďalších bodov priamky a už označovať nemusíme (stačí označiť príslušnú sklopenú polohu). Pretože bod B leží v kladnom polpriestore s hranicou π, jeho sklopená poloha bude ležať v príslušnej opačnej polrovine k polrovine $\mapsto a_1(A)$ (obr. 7a). Sklopená poloha priamky a je určená sklopenými polohami jej bodov A, B: $(a) = \overleftrightarrow{(A)(B)}$. Potom $|AB| = |(A)(B)|$ a uhol φ priamky a s priemetňou π je zhodný s uhlom priamok a_1, (a). Bod $a_1 \cap (a) = P^a$ má kótu rovnajúcu sa nule, je to teda stopník priamky a. Podľa definície intervalu priamky sa dĺžka úsečky $A_1P_1^a$ rovná dvom intervalom priamky a. Jej stred je obrazom stredu úsečky AP^a, ktorého kóta sa rovná -1. Na obrázku je vystupňovaná úsečka $AB \subset a$. Pre úsporu miesta sú označené len kóty bodov stupnice.

b) V druhom prípade sú kóty bodov A, B veľké čísla, preto použijeme sklopenie premietacej roviny α priamky a do úrovne. Výhodne by sme si mohli zvoliť v úrovni $\overline{\pi}$ jeden z bodov A, B (jeho priemet by bol totožný s priemetom jeho sklopenej polohy). Pridajme si k danej úlohe ešte doplňujúcu úlohu: zostrojte bod C priamky a tak, aby $z^C = 32j$. Vtedy je výhodná voľba roviny $\overline{\pi}$, pre ktorú $z^{\overline{\pi}} = 32j$. Budeme zostrojovať pravouhlé priemety sklopených polôh bodov A, B do tejto roviny (podľa obr. 6). Platí: $\sigma_1^A \perp a_1 \wedge |r^A| = |A_1(A)_1| = |31j - 32j| = j$; analogicky $|r^B| = |B_1(B)_1| = |35j - 32j| = 3j$. Pretože $z^A < 32j < z^B$, leží bod $(B)_1$ v opačnej polrovine ku polrovine $\mapsto o_1(A)_1$. Potom platí: $|AB| = |(A)_1(B)_1|$; $\varphi = \angle a\pi \cong \angle (a)_1 a_1$; $(a)_1 \cap a_1 = C_1(32)$; $i_a = |A_1C_1|$. Úsečku $AB \subset a$ vystupňujeme analogicky s a). (Obr. 7b)

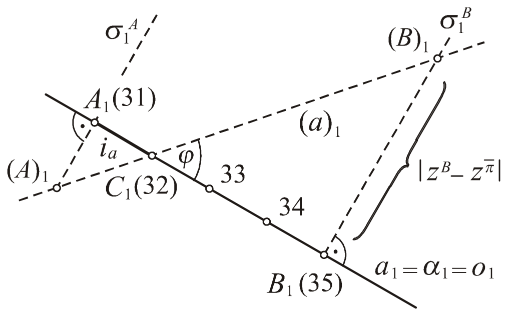
---

[12] Znamená to, že pre každý trojuholník $ABC \subset \alpha$ platí: $\Delta ABC \cong \Delta(A)(B)(C) \cong \Delta(A)_1(B)_1(C)_1$. Pojem rovinného poľa je vysvetlený v prvom paragrafe textu [4].

[13] Konfrontujte si zápis s obrázkom 5 a modelujte si situáciu v priestore pomocou modelu pravouhlého trojuholníka.



Obr. 7a



Obr. 7b

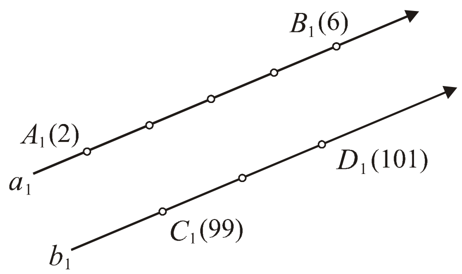
Poznámka 2.2

Ak majú dve priamky *a*, *b* (vo všeobecnej polohe) rovnobežné priemety (t. j. premietacie roviny oboch priamok sú navzájom rovnobežné) má pri určovaní ich vzájomnej polohy zmysel skúmať, či sú stupnice priamok *a*, *b* orientované súhlasne alebo nesúhlasne. Tieto pojmy budeme definovať na základe definície súhlasnej/nesúhlasnej orientácie dvoch rovnobežných polpriamok alebo polpriamok tej istej priamky v planimetrii ([5]).

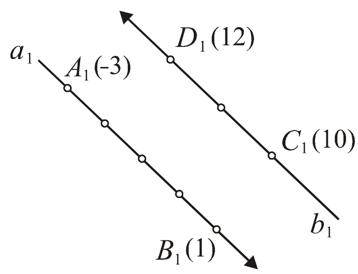
Definícia 2.3

Nech $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ sú priamky vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetňu, ktoré ležia v tej istej alebo v navzájom rovnobežných premietacích rovinách a platí: $z^A < z^B \wedge z^C < z^D$ alebo $z^A > z^B \wedge z^C > z^D$. Hovoríme, že stupnice priamok $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ sú orientované súhlasne, resp. nesúhlasne práve vtedy, keď sú súhlasne, resp. nesúhlasne orientované polpriamky $\overset{\mapsto}{A_1B_1}$ a $\overset{\mapsto}{C_1D_1}$. [14]

Na obr. 8 sú v prípade a) stupnice na priamkach $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ orientované súhlasne, v prípade b) nesúhlasne.



Obr. 8a



Obr. 8b

3 Obraz dvojice priamok. Obraz roviny

O určení vzájomnej polohy dvoch priamok (jedna zo základných polohových úloh) daných okótovanými priemetmi určujúcich prvkov hovorí nasledujúca veta:

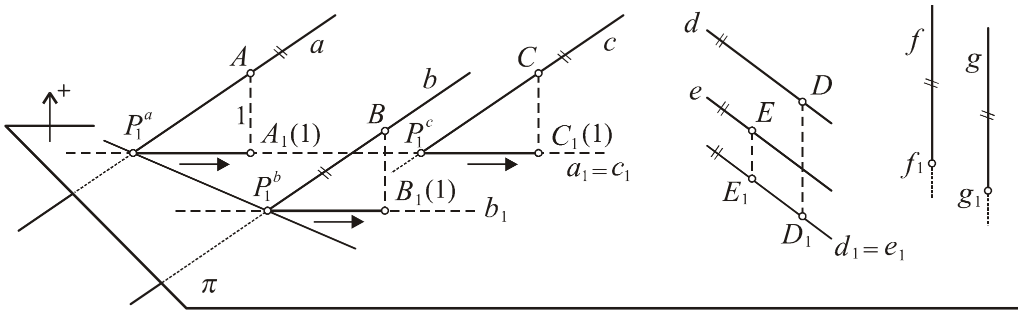
---

[14] Polpriamky $\overset{\mapsto}{A_1B_1}$ a $\overset{\mapsto}{C_1D_1}$ sú orientované súhlasne, ak je jedna z nich *podmnožinou* druhej alebo sú navzájom rovnobežné a body B_1, D_1 ležia v tej istej polrovine s hranicou $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ ([5]). V opačnom prípade hovoríme o nesúhlasnej orientácii polpriamok jednej roviny.

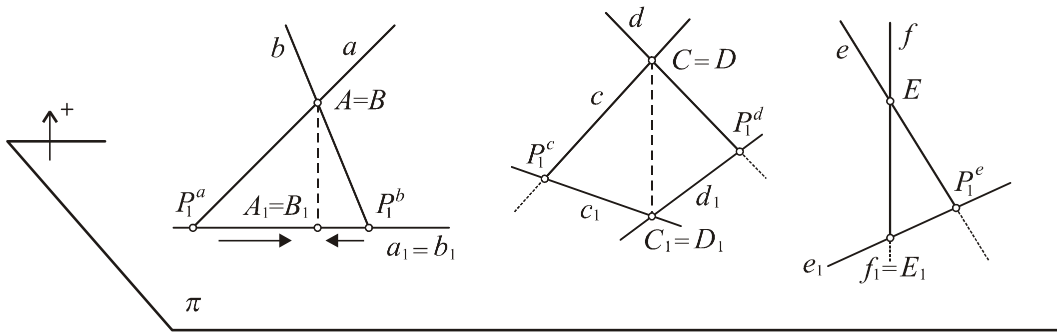
Veta 3.1

a) Dve rovnobežné priamky (nie premietacie ani rovnobežné s priemetňou) majú *zhodné intervaly*, *súhlasne orientované stupnice* a:
1. *totožné priemety* (ak majú spoločnú premietaciu rovinu) alebo
2. *rovnobežné* (rôzne) *priemety* (ak nemajú spoločnú premietaciu rovinu).

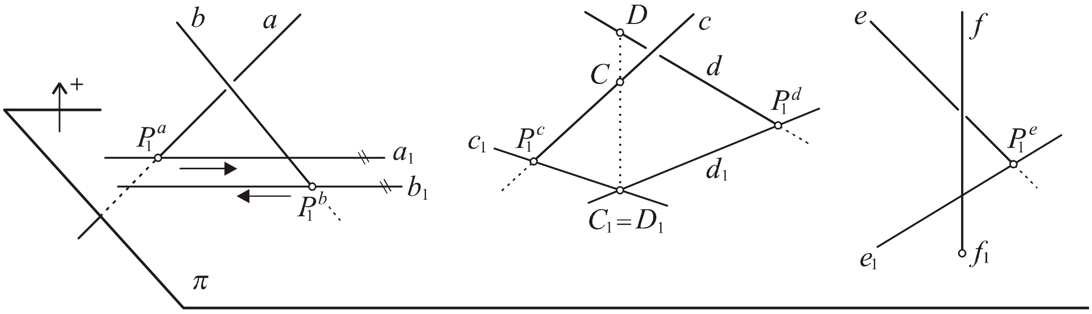
Priemetom dvoch rovnobežiek, ktoré sú rovnobežné s priemetňou je tá istá priamka alebo dve (navzájom rôzne) rovnobežné priamky; priemetom dvoch priamok kolmých na priemetňu sú dva rôzne body. (Obr. 9a)



Obr. 9a



Obr. 9b



Obr. 9c

b) Dve rôznobežné priamky, z ktorých žiadna nie je premietacia, majú:
1. *totožné priemety* (ak majú spoločnú premietaciu rovinu) a buď nemajú zhodné intervaly alebo nemajú súhlasne orientované stupnice;
2. *rôznobežné priemety* (ak nemajú spoločnú premietaciu rovinu), pričom kóty bodov rôznobežiek, ktoré sa premietajú do priesečníka priemetov sa rovnajú.

Priemetom dvojice rôznobežiek, z ktorých jedna je premietacou priamkou je bod a priamka s ním incidentná. (Obr. 9b)

c) Dve mimobežné priamky, z ktorých žiadna nie je premietacou priamkou majú:
1. *rôzne rovnobežné priemety* (ak ich premietacie roviny sú navzájom rovnobežné) a buď nemajú zhodné intervaly alebo nemajú súhlasne orientované stupnice;
2. *rôznobežné priemety* (ak ich premietacie roviny sú navzájom rôznobežné), pričom kóty bodov mimobežiek, ktoré sa premietajú do priesečníka ich priemetov, sú navzájom rôzne.

Priemetom dvoch mimobežiek, z ktorých jedna je premietacou priamkou, je bod a priamka s ním neincidentná. (Obr. 9c)

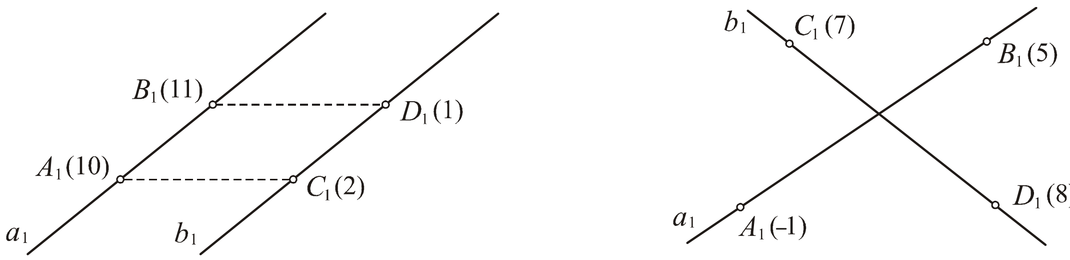
Poznámka 3.1.

Pokúste sa vymodelovať dve rovnobežky, resp. rôznobežky, resp. mimobežky podľa obr. 9a, resp. 9b, resp. 9c. Riešte úlohu 3.1.

Úloha 3.1

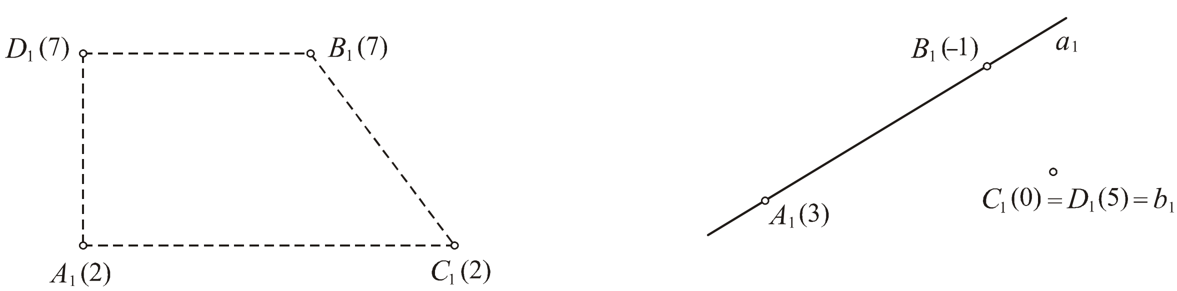
Určite a odôvodnite vzájomnú polohu dvojice priamok $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ v zadaniach a – f (obr. 10) (bez použitia sklápania premietacích rovín priamok). Vymodelujte priamky a, b.

Obr. 10a, b



$A_1B_1D_1C_1$ je rovnobežník

Obr. 10c, d



$A_1C_1B_1D_1$ je lichobežník

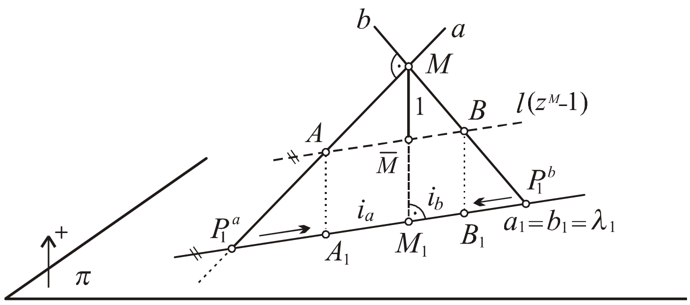
Obr. 10e, f

Veta 3.2

Dve navzájom kolmé priamky (žiadna z priamok nie je kolmá na priemetňu), ktoré ležia v spoločnej premietacej rovine alebo v rovnobežných premietacích rovinách, majú *navzájom prevrátené* hodnoty intervalov a *nesúhlasne orientované* stupnice.

Dôkaz

Vzhľadom na vetu 3.1 a) stačí urobiť dôkaz pre dve navzájom kolmé priamky ležiace v tej istej premietacej rovine λ ($a \cup b \subset \lambda$, $\lambda \perp \pi$). Spoločný bod kolmých priamok si označme M ($M = a \cap b$) (obr. 11) a v rovine λ si zvoľme priamku l s kótou $z^l = |z^M - 1|$ (t. j. $l \parallel \pi$). ($1 \in \boldsymbol{R}$ je dĺžka zvolenej jednotkovej úsečky.) Priamka l pretína priamky a, b v bodoch A, B (v danom poradí), teda podľa definície intervalu priamky $i_a = |A_1M_1|$ a $i_b = |B_1M_1|$. V pravouhlom trojuholníku ABM s výškou $M\overline{M}$ ($|M\overline{M}| = 1$) platí: $i_a . i_b = |A\overline{M}| . |\overline{M}B| = 1^2$ (Euklidova veta o výške), čo bolo treba dokázať. Navyše z kolmosti priamok a, b vyplýva, že bod M_1 je vnútorným bodom úsečky P^aP^b, teda stupnice priamok a, b sú orientované nesúhlasne.



Obr. 11

Vzhľadom na určenie roviny ([1]) je obraz roviny, ktorá nie je premietacia ani rovnobežná s priemetňou, určený obrazom ľubovoľných jej troch nekolineárnych bodov (alebo dvojicou jej ľubovoľných rovnobežiek, či rôznobežiek). Každý ďalší bod roviny je určený svojím pravouhlým priemetom (určenie kóty takéhoto bodu rieši úloha 3.2). Rovina kolmá na priemetňu je určená svojím pravouhlým priemetom a jej ľubovoľný bod musí byť určený pravouhlým priemetom a kótou. Všetky body roviny rovnobežnej s priemetňou majú rovnajúce sa kóty (hovoríme aj o kóte roviny); každý bod roviny je určený svojím pravouhlým priemetom.

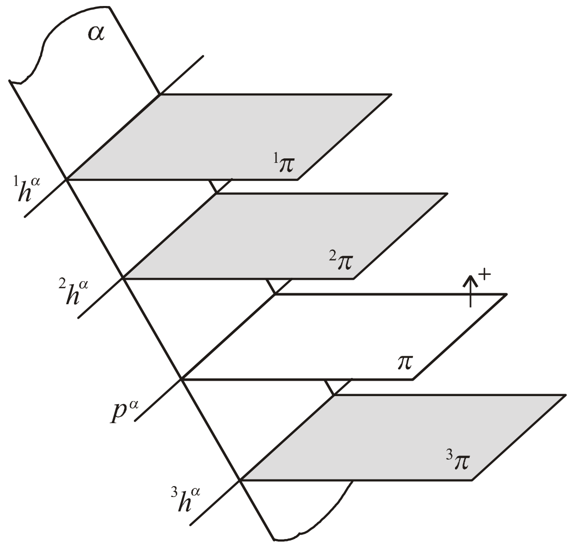
Pri zobrazovaní rovinných útvarov osobitné postavenie zaujímajú priamky roviny, ktoré sú rovnobežné s priemetňou a priamky roviny na ne kolmé. Definujme tieto priamky (dvoch osnov priamok) roviny.

Definícia 3.1

a) Priamka roviny α ($\alpha \# \pi$) rovnobežná s priemetňou sa nazýva *hlavná priamka roviny* α. Kótu ľubovoľného bodu hlavnej priamky nazývame *kótou hlavnej priamky*. Hlavná priamka s kótou nula sa nazýva *stopa roviny* α.
Hlavnú priamku roviny α s kótou z ($z \in \boldsymbol{R}$) budeme označovať $h^\alpha(z)$, stopu roviny α označujeme p^α.

b) Priamka roviny α ($\alpha \# \pi$) kolmá na hlavné priamky tejto roviny sa nazýva spádovou priamkou roviny α. Spádovú priamku roviny α budeme označovať s^α.

Dôsledok 3.1 Osnovu hlavných priamok roviny dostaneme pomocou osnovy rovín rovnobežných s priemetňou; každá hlavná priamka roviny α je priesečnicou jednej z rovín tejto osnovy rovín s rovinou α. Stopa roviny je priesečnica roviny s priemetňou. (Obr. 12) Kolmým priemetom osnovy hlavných priamok roviny α $(\alpha \not\perp \pi,\ \alpha \not\parallel \pi)$ je osnova priamok priemetne určená stopou $p^{\alpha} = p_1^{\alpha}$ tejto roviny.



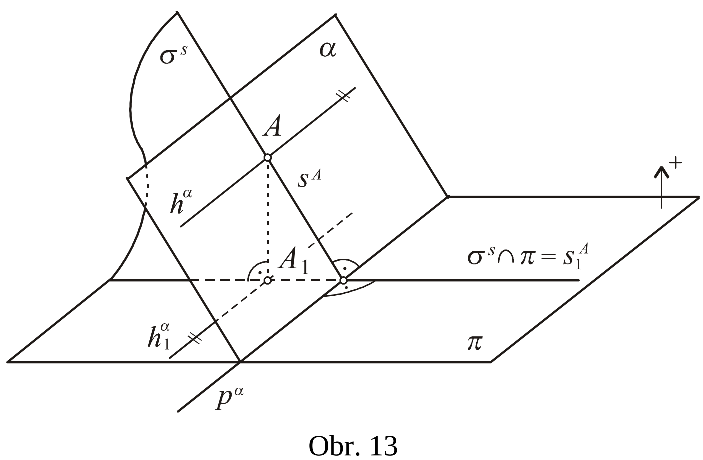
Obr. 12

Veta 3.3

Pravouhlé priemety hlavných a spádových priamok roviny α $(\alpha \not\perp \pi,\ \alpha \not\parallel \pi)$ sú navzájom kolmé.

Dôkaz

Nech p^{α} je stopa roviny α a A ľubovoľný bod roviny α neležiaci v priemetni π ($\alpha = \overleftrightarrow{p^{\alpha} A}$). Zostrojme spádovú priamku roviny α prechádzajúcu bodom A (označme ju s^A).



Obr. 13

Nech bod A_1 je kolmým priemetom bodu A do roviny π; zrejme $A \neq A_1$ (prečo?). Platí: $s^A \subset \alpha \wedge s^A \perp p^{\alpha}$ (definícia spádovej priamky) a $AA_1 \perp p^{\alpha}$ (pretože $AA_1 \perp \pi$). Dôsledkom je kolmosť premietacej roviny σ^s spádovej priamky s^A na stopu p^{α} roviny α ($\overleftrightarrow{s^A A_1} \perp p^{\alpha}$). Ale priamka $\sigma^s \cap \pi$ je kolmým priemetom priamky s^A ($\sigma^s \cap \pi = s_1^A$) do roviny π, teda je tiež kolmá na priamku p^α: $s_1^A \perp p^\alpha (= p_1^\alpha)$. Na základe vety 3.1 a je priamka s_1^A kolmá na priemet každej hlavnej priamky danej roviny, teda $s_1^A \perp h_1^\alpha$, čo bolo treba dokázať.

Poznámka 3.2

1. Každá rovina α ($\alpha \perp \pi$, $\alpha \# \pi$) je v kótovanom zobrazení určená obrazom svojej ľubovoľnej spádovej priamky s^α. Na základe vety 3.3 stačí zostrojiť priemet jednej hlavnej priamky h_1^α (z_0) tejto roviny; priamka h^α je priemetom a kótou z_0 určená, t. j. $\alpha = \overleftrightarrow{s^\alpha h^\alpha}$.

2. Uhol roviny α s priemetňou je zhodný s uhlom spádovej priamky tejto roviny s priemetňou (prečo?). Veľkosť tohto uhla budeme nazývať odchýlka roviny (definícia 3.2).

3. Spád spádovej priamky roviny α ($\alpha \perp \pi$, $\alpha \# \pi$) je väčší než spád ľubovoľnej inej priamky roviny (ktorá nie je spádovou priamkou). (Odôvodnite!)

Definícia 3.2

a) Veľkosť uhla roviny α s priemetňou sa nazýva *odchýlka roviny* α.

b) Spád, resp. interval spádovej priamky roviny budeme nazývať *spádom*, resp. *intervalom* tejto *roviny*. (Označenie: s_α, resp. i_α pre rovinu α.)

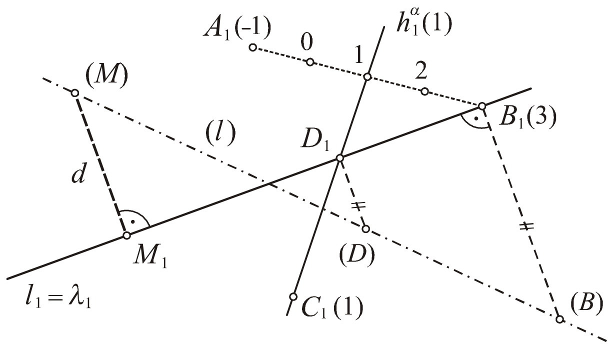
Úloha 3.2

Daná je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ ($A = (A_1, z^A)$, $B = (B_1, z^B)$, $C = (C_1, z^C)$) a pravouhlý priemet M_1 jej bodu M. Dourčite kótu bodu M (trojica bodov A_1, B_1, C_1 je nekolineárna).

Riešenie

a) Ak je priemet bodu M incidentný s priemetom priamky obsahujúcej ľubovoľnú zo strán trojuholníka ABC, tak bod M leží na tejto priamke a jeho kótu určíme pomocou sklopenia jej premietacej roviny (úloha 2.1).

b) V opačnom prípade existuje aspoň jeden bod z trojice bodov A_1, B_1, C_1, pre ktorý spojnica s bodom M_1 je rôznobežná s priamkou určenou zvyšnými dvoma bodmi. Napríklad priamka $l_1 = \overleftrightarrow{M_1B_1}$ je rôznobežná s priamkou $\overleftrightarrow{A_1C_1}$. Označme: $\overleftrightarrow{M_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_1C_1} = \{L_1\}$, t. j. $\overleftrightarrow{MB} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{L\}$. Kótu bodu L zostrojíme na základe incidencie bodu L s priamkou $\overleftrightarrow{AC}$ (podľa a)) a analogicky kótu bodu M z incidencie bodu M s priamkou $\overleftrightarrow{LB}$. Konštrukcia nie je ilustrovaná obrázkom; vykonajte ju pre ľubovoľne zvolené zadanie.



Obr. 14

b1) (*Iná konštrukcia*) Ak sú kóty bodov A, B, C celé čísla, je výhodné vystupňovať niektorú so strán trojuholníka[15] a zostrojiť priemet jednej z hlavných priamok roviny α.

[15] Stupňovanie priamky je možné v tomto prípade vykonať bez sklopenia premietacej roviny tejto priamky (pomocou rozdelenia úsečky na konečný počet zhodných úsečiek). Na obr. 14 je zostrojená hlavná priamka s kótou 1.

Potom vyberieme ľubovoľný z vrcholov trojuholníka A, B, C tak, aby jeho spojnica s bodom M pretínala túto hlavnú priamku (to samozrejme vidíme na priemete priamok, pretože rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ nie je premietacia). Napr. $l = \overleftrightarrow{BM}$ a $l_1 \cap h_1^{\alpha} = D_1$, pričom kóta bodu D sa rovná kóte zostrojenej hlavnej priamky. Na určenie kóty bodu M použijeme sklopenie premietacej roviny priamky $l = \overleftrightarrow{BD}$ $(= \overleftrightarrow{BM})$. (Obr. 14) Ak označíme $|M_1(M)| = d$, tak podľa voľby kót na obrázku pri sklopení roviny λ do priemetne platí: $z^M = -d$.

Poznámka 3.3

Analogicky s riešením úlohy 3.2 možno riešiť úlohu o overení incidencie daného bodu $M = (M_1, z^M)$ s danou rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$. Stačí porovnať kótu bodu M s kótou priesečníka K premietacej priamky bodu M s rovinou α, t. j. bodu $K \in \alpha$, pre ktorý $K_1 = M_1$. Konštrukcia kóty bodu K je riešením úlohy 3.2. Platí: $M \in \alpha \Leftrightarrow M = K \Leftrightarrow z^M = z^K$.

4 Polohové úlohy

Z planimetrie [5] a stereometrie [1] vieme, že *riešenie úloh o vzájomnej polohe* geometrických útvarov je založené na axiómach *incidencie*, *usporiadania* a *rovnobežnosti*. V riešení úloh – pokiaľ nepôjde o elementárne úlohy o základných geometrických útvaroch (napr. úloha 4.1) – sa bude striktne vyžadovať najprv zápis algoritmu stereometrického riešenia úlohy [16] a následne zápis použitia algoritmu v riešení úloh na obrazoch útvarov v kótovanom zobrazení (tento zápis riešenia môže byť sčasti symbolický [17]).

V texte je ukážka riešenia štandardných polohových úloh. Stupeň ovládania polohových úloh si môžu študenti preveriť na zbierke neriešených polohových úloh, ktorá sa snaží vystihnúť čo najrozmanitejšie vzájomné polohy geometrických útvarov (kapitola 7). Riešené úlohy sú zostavené tak, aby viedli čitateľa k osvojeniu si tej-ktorej metódy riešenia tej istej úlohy v závislosti od vzájomnej polohy určujúcich prvkov daných objektov, napríklad vzhľadom na priemetňu.[18] Nasledujúce základné úlohy sa často vyskytujú v riešení zložitejších polohových úloh (tam sa už považujú za elementárne konštrukcie) a pri konštrukcii obrazov základných telies a riešení jednoduchých úloh o základných telesách (napr. konštrukcie rovinných rezov, priesečníkov s priamkou, a i.).

Úloha 4.1

Zostrojte priamku m, ktorá prechádza daným bodom M a je rovnobežná s priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$.

Riešenie

Priamka a nie je premietacou priamkou, ani rovnobežná s priemetňou. Podľa vety 3.1 sú dve priamky vo všeobecnej polohe rovnobežné práve vtedy, keď majú: – navzájom rovnobežné priemety; – zhodné intervaly; – súhlasne orientované stupnice. Platí teda:

---

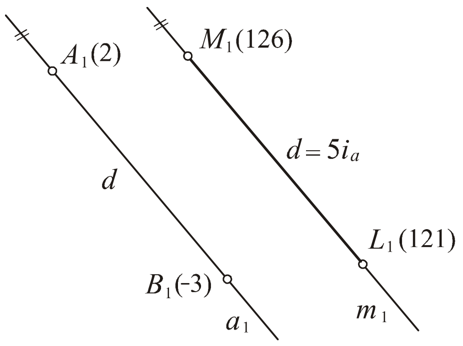
[16] V algoritme stereometrického riešenia úlohy vystupujú tzv. *elementárne konštrukcie*. Tento pojem je vysvetlený v [1] (úvod kapitoly 3, s. 20).

[17] K čisto symbolickému zápisu riešenia možno prejsť v etape dokonalého ovládania pojmov a používania znakov z teórie množín, i matematickej logiky a nielen (napr. ovládanie systému planimetrie, a i.), o čom nemôže byť reč v prvom semestri štúdia. Navyše u študentov učiteľského štúdia je mimoriadne dôležitý nácvik bezchybného vyjadrovania s používaním správnej (modernej) terminológie (ktorá je tiež v neustálom vývine). Rozhodne nejde o stratu času a veríme, že študenti to ocenia už pri písaní – kompilovaní bakalárskej práce na základe materiálov, z ktorých najmä historické pochádzajú zo starších prameňov. Doslovný „preklad“ by sa v takomto prípade skončil fiaskom.

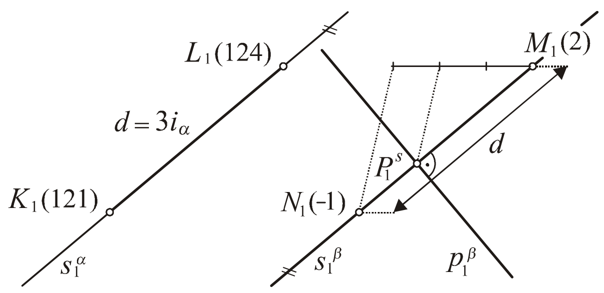
[18] Použitie jedinej metódy riešenia tej istej polohovej úlohy nemusí vždy viesť k výsledku, môže sa ukázať neproduktívnym.

$M_1 \in m_1 \wedge m_1 \parallel a_1 \wedge i_m = i_a$

Pretože, $z^A = 2j$, $z^B = -3j$ (obr. 15), dĺžka úsečky A_1B_1 sa rovná piatim intervalom priamky a, t. j. i piatim intervalom priamky m. Kóta bodu M sa rovná $126j$, preto môžeme jednoducho zostrojiť priemet bodu L priamky m, ktorého kóta sa rovná $(126 + 5)j$ alebo $(126 - 5)j$. Na obrázku je zvolený bod L s kótou $121j$. Potom platí: $M_1L_1 \cong A_1B_1$ a úsečky A_1B_1 a M_1L_1 sú súhlasne orientované. (Ktorú z dvoch možností si vyberieme závisí od vzájomnej polohy daných prvkov – prevažne nás motivuje úspora miesta v zošite (na tabuli)).
Úloha má práve jedno riešenie (axióma rovnobežnosti) $m = \overleftrightarrow{ML}$.



Obr. 15



Obr. 16

Úloha 4.2

Daná je rovina α obrazom spádovej priamky $s^\alpha = \overleftrightarrow{KL}$ ($K = (K_1, z^K)$, $L = (L_1, z^L)$). Zostrojte rovinu, ktorá prechádza daným bodom $M = (M_1, z^M)$ a je rovnobežná s rovinou α. Zostrojte i stopu zostrojenej roviny.

Riešenie

Rovina α má všeobecnú polohu[19] a bod M v nej neleží (odôvodnite). Potom existuje práve jedna rovina β ($M \in \beta \wedge \beta \parallel \alpha$) [1]. Na jej určenie stačí zostrojiť spádovú priamku s^β roviny β, ktorá prechádza bodom M. Platí: Dve roviny vo všeobecnej polohe sú rovnobežné práve vtedy, keď sú navzájom rovnobežné ľubovoľné ich spádové priamky s^α, s^β. Spádovú priamku roviny β zostrojíme na základe úlohy 4.1: $M \in s^\beta \wedge s^\beta \parallel s^\alpha$ ($s^\beta = \overleftrightarrow{MN}$) (obr. 16).

Stopa p^β roviny β prechádza stopníkom P^s spádovej priamky s^β; zostrojili sme ho vystupňovaním úsečky $MN \subset s^\beta$ ($z^N = -1$) a platí: $p_1^\beta \perp s_1^\beta$.

Úloha 4.3

Určite vzájomnú polohu priamky $m = \overleftrightarrow{AB}$ a roviny α. Rovina α je určená obrazom spádovej priamky $s^\alpha = \overleftrightarrow{KL}$. Všetky body sú určené okótovanými priemetmi (obr. 17).

Stereometrické riešenie úlohy

Algoritmus riešenia úlohy je známy zo stereometrie. Spočíva v tom, že danou priamkou m preložíme ľubovoľnú rovinu κ ($\kappa \nparallel \alpha$) a vzájomnú polohu priamky s rovinou odvodíme zo vzájomnej polohy danej priamky s priamkou, ktorá je priesečnicou rovín κ a α. Pretože:

$$m \cap \alpha = (m \cap \kappa) \cap \alpha = m \cap (\kappa \cap \alpha) = m \cap l \; (l = \kappa \cap \alpha),$$

---

[19] Ak by rovina bola určená trojicou nekolineárnych bodov, zostrojíme jej ľubovoľnú hlavnú priamku (úloha 3.2, obr. 14) a následne spádovú priamku prechádzajúcu niektorým z daných bodov, ktorý na tejto hlavnej priamke neleží. Túto skutočnosť v zadaní ďalších úloh už nebudeme pripomínať.

stačí určiť vzájomnú polohu priamok m, l. Ak majú tieto priamky spoločný bod, tak je tento bod spoločným bodom priamky m s rovinou α. V prípade $m = l$ priamka m leží v rovine α, v prípade $m \cap l = \emptyset$ je daná priamka s rovinou α rovnobežná.

Riešenie úlohy v nákresni

1. V prvom kroku pôjde o vhodný výber roviny κ z rovín zväzku s osou v priamke m. Najjednoduchším prípadom je voľba premietacej roviny priamky m, a to roviny κ ($m \subset \kappa \wedge \kappa \perp \pi$).[20] Vtedy totiž platí:

κ_1 je priamka $\Rightarrow m_1 = \kappa_1$.

Navyše v rovine κ leží aj priamka l a preto $l_1 = \kappa_1 = m_1$.[21]

2. V druhom kroku je potrebné dourčiť priamku l (pomocou incidencie $l \subset \alpha$ – pozrite si stereometrické riešenie). Priamku l dourčíme napr. bodmi K', L', ktoré ležia na hlavných priamkach ${}^1h$, ${}^2h$ roviny α prechádzajúcich – v danom poradí – bodmi K, L spádovej priamky s^α. Zrejme platí: ${}^1h_1 \cap l_1 = K_1'$, ${}^2h_1 \cap l_1 = L_1' \wedge z^{K'} = z^K, z^{L'} = z^L$. Potom:

$l = \overleftrightarrow{K'L'}$ ($z^{K'} = 13$, $z^{L'} = 15$)

v súlade s voľbou určujúcich prvkov na obr. 17.

3. Vzájomnú polohu priamok m, l roviny κ určíme pomocou sklopenia tejto roviny. Podľa zadania sa rozhodneme, či úlohu vyriešime pomocou sklopenia roviny κ do priemetne alebo do úrovne. Na obr. 17 ide o sklopenie roviny do úrovne $\pi'(z^{\pi'} = 11)$, bod s najmenšou kótou v úrovni sme vybrali preto, aby sa priemety sklopených polôh zvyšných bodov dostali do tej istej polroviny s hranicou κ_1. Pre priemety sklopených polôh priamok m, l platí:

$(m)_1 \cap (l)_1 = (R)_1 \Rightarrow m \cap l = R$, t. j. $m \cap \alpha = R$.

V kótovanom zobrazení je potrebné určiť kótu bodu R. Ak si označíme d dĺžku úsečky $R_1(R)_1$ a vezmeme do úvahy kótu roviny $\pi'(z^{\pi'} = 11)$, tak platí: $z^R = d + 11$.

Záver. Priamka m je s rovinou α rôznobežná; spoločný bod $R = m \cap \alpha$ je určený usporiadanou dvojicou (R_1, $d + 11$). Vyjadrené symbolicky: $m \cap \alpha = R$, $R = (R_1, d + 11)$.

Poznámka 4.1

1. V riešení predchádzajúcej úlohy ležia priamky m, l v spoločnej premietacej rovine, teda $m_1 = l_1$; hovoríme aj, že pravouhlé priemety priamok sa „prekrývajú“. Priamka l, resp. m sa preto nazýva *krycou priamkou* priamky m, resp. l.

2. Riešenie úloh o prienikoch geometrických útvarov (z ktorých aspoň jeden je dvojrozmerný) nastoľuje problém viditeľnosti častí zobrazovaných objektov. V predchádzajúcej úlohe treba ešte rozhodnúť, ktorá z dvoch polpriamok priamky m so začiatkom v bode $R = m \cap \alpha$ je viditeľná vzhľadom na rovinu α pri zvolenej orientácii oboch polpriestorov s hranicou v rovine π (bod 4 riešenia úlohy 4.3). Princíp určovania viditeľnosti možno vyjadriť nasledovne:

„*Z dvoch rôznych bodov na tej istej premietacej priamke je viditeľný bod, ktorého orientovaná vzdialenosť od priemetne je väčšia*.“

Aplikáciu tohto princípu si vysvetlíme na predchádzajúcej úlohe.

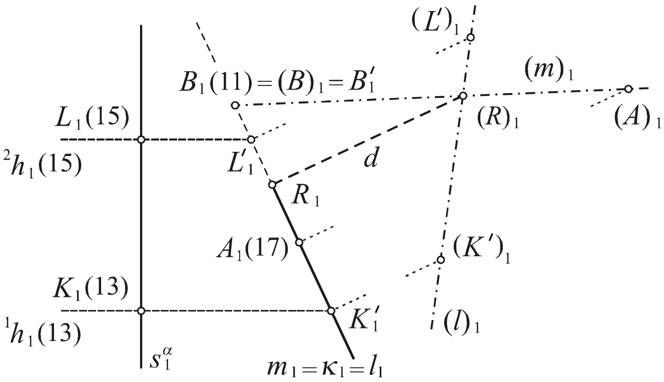
---

[20] Takáto voľba nemusí byť vždy vyhovujúca. Ukážeme si to na riešení tej istej úlohy v prípade inej voľby daných prvkov (úloha 4.3a, obr. 18).

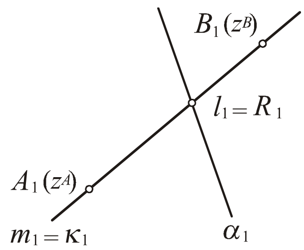
[21] V prípade $l \perp \pi$ by prirodzene platila inklúzia $l_1 \subset \kappa_1$ (l_1 je bodom). To nastane práve vtedy, keď aj rovina α bude premietacou rovinou ($\alpha \perp \pi$). Konštrukcia sa v tomto prípade zjednoduší na dourčenie kóty spoločného bodu $R = m \cap l$ ($R_1 = l_1$) na základe incidencie $R \in m$ (obr. 17a). Že nejde o takúto situáciu je zrejmé zo zadania roviny α (obr. 17).

4. *Určenie viditeľnej polpriamky priamky m so začiatkom R vzhľadom na rovinu* α

Vyberme si ľubovoľný bod priamky *m* rôzny od bodu *R*, napr. bod *B*. Nech $B_1' = B_1$, pričom bod B' leží v rovine α. Musíme dať odpoveď na otázku, ktorý z bodov *B*, B' je viditeľný. Platí: $z^B = 11$, $z^{B'} > 15$ [22] (táto nerovnosť vyplýva zo stupnice spádovej priamky s^α danej roviny a vzájomnej polohy priemetu bodu B' a priemetov hlavných priamok ${}^1h$, ${}^2h$).[23] Znamená to, že je viditeľný bod B' roviny α a bod *B* priamky *m* viditeľný nie je. Odtiaľ vyplýva, že polpriamka $\mapsto RB \subset m$ nie je vzhľadom na rovinu α viditeľná ($z^B < z^{B'}$), teda je viditeľná k nej opačná polpriamka $\mapsto RA$.



Obr. 17



Obr. 17a

V riešení nasledujúcej úlohy o vzájomnej polohe priamky a roviny predstavíme takú polohu daných prvkov, pri ktorej je použitie premietacej roviny danej priamky celkom nevyhovujúce.

Úloha 4.3a

Určite vzájomnú polohu priamky $m = \leftrightarrow AB$ s rovinou $\alpha = \leftrightarrow {}^1h\,{}^2h$ (${}^ih$ je hlavná priamka roviny α s kótou ${}^iz$).

Riešenie

Stereometrické riešenie úlohy je analogické s riešením úlohy 4.3, preto ho budeme vyjadrovať len symbolicky, súbežne s riešením úlohy v nákresni.

1. λ; $m \subset \lambda \wedge \lambda \# \alpha$ – ľubovoľná [24]

Použitie premietacej roviny je nevyhovujúce (prečo?), zvolíme si preto ľubovoľnú rovinu požadovaných vlastností tak, aby priesečnica *l* rovín λ a α bola jednoducho zostrojiteľná. Platí: priamka *m* leží v rovine λ práve vtedy, keď hlavná priamka ${}^1\overline{h}$, *resp.* ${}^2\overline{h}$ roviny λ s kótou z^A, resp. z^B prechádza bodom *A*, resp. *B*. Pri voľbe kolmých priemetov ${}^i\overline{h}_1$ (i = 1, 2) stačí vziať do úvahy tento fakt a to, aby hlavné priamky ${}^i\overline{h}$ pretínali hlavné priamky danej

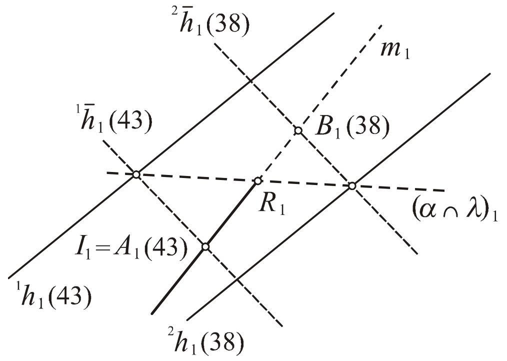
[22] Pre zjednodušenie zápisu sa v riešení úlohy bude kóta bodu zapisovať bez symbolu zvolenej jednotkovej úsečky. Zistenie pevne zvolenej jednotky dĺžky sa v riešených úlohách necháva čitateľovi.

[23] Okrem toho je zrejmé, že bod B' leží na priamke *l* a možno zostrojiť aj priemet jeho sklopenej polohy $(B')_1 \in (l)_1$. Vzhľadom na úspornosť konštrukcie sa bude uprednostňovať postup uvedený v 4.

[24] Výrazy s bodkočiarkou v symbolickom zápise budeme čítať: "zostrojíme" určitý objekt (označený pred bodkočiarkou), ktorý má vlastnosti uvedené za bodkočiarkou. Uvedený zápis sa bude čítať: „Zostrojíme ľubovoľnú rovinu λ, ktorá prechádza priamkou *m* a nie je rovnobežná s rovinou α".

roviny α (s kótami ^1z (= z^A), ^2z (= z^B)) v dostupných priesečníkoch.[25] Pretože hlavné priamky ^ih, $^i\bar{h}$ ležia v tej istej rovine $^i\pi$ ($A \in {}^1\pi$, $B \in {}^2\pi$, $^1\pi \parallel {}^2\pi$), ich spoločné body $^ih \cap {}^i\bar{h}$ (i = 1, 2) sú bodmi priesečnice rovín ($\lambda \cap \alpha$). Každý z nich je spoločným bodom trojice rovín: $^i\pi \cap \lambda \cap \alpha = ({}^i\pi \cap \lambda) \cap ({}^i\pi \cap \alpha)$.

2. Platí: $m \cap \alpha = m \cap (\lambda \cap \alpha) = R$ (obr. 18). Kótu bodu R možno dourčiť pomocou sklopenia premietacej roviny priamky m.



Obr. 18

3. *Určenie viditeľnej polpriamky priamky m* (so začiatkom R) vzhľadom na rovinu α:

Zvoľme si bod I ($I \in \alpha$) tak, ležal s bodom A na tej istej premietacej priamke, t. j. $A_1 = I_1$. Pre kótu bodu I platí: $38 < z^I < 43$ (bod I_1 je bodom rovinného pásu určeného priemetmi hlavných priamok ^1h, ^2h roviny α) a $z^A = 43$, t. j. $z^I < z^A$ a viditeľný je bod A priamky m. Odtiaľ vyplýva viditeľnosť polpriamky $\mapsto RA$ priamky m.

Úloha 4.4

Zostrojte priesečnicu rovín α a β ($\alpha \nparallel \beta$). Roviny sú určené spádovými priamkami $s^\alpha = \leftrightarrow AB$, $s^\beta = \leftrightarrow CD$.

Stereometrické riešenie úlohy

Ak majú roviny α, β všeobecnú polohu, úlohu riešime analogicky s konštrukciou priesečnice rovín λ, α v predchádzajúcej úlohe. Stačí zostrojiť dve dvojice hlavných priamok oboch rovín s dvoma vhodne vybranými kótami. Priesečníky hlavných priamok rovím s tou istou kótou sú bodmi priesečnice rovín. Všeobecne toto riešenie môžeme vyjadriť nasledovne. Zvolíme si ľubovoľnú rovinu $\bar{\pi}$ rovnobežnú s rovinou π. Jeden zo spoločných bodov rovín α, β je bod $\bar{\pi} \cap \alpha \cap \beta = (\bar{\pi} \cap \alpha) \cap (\bar{\pi} \cap \beta) = {}^1h \cap {}^2h = Q$ (^1h, resp. ^2h sú hlavné priamky rovín α, resp. β s kótou rovnajúcou sa kóte zvolenej roviny $\bar{\pi}$). Druhý bod priesečnice rovín získame analogicky pomocou ďalšej roviny rovnobežnej s priemetňou.

Opísané riešenie je neproduktívne v prípade dvoch rôznobežných rovín, ktorých hlavné priamky sú navzájom rovnobežné (obr. 19), t. j. pre priemety spádových priamok rovín platí: $s_1^\alpha \parallel s_1^\beta$. V tomto prípade je priesečnicou spoločná hlavná priamka oboch rovín (vzájomná

[25] V riešenej úlohe sme si pre jednoduchosť zvolili $z^A = 43j$, $z^B = 38j$, t. j. $z^A = {}^1z$, $z^B = {}^2z$. Voľba roviny λ vo všeobecnej polohe je výhodnou i napr. vtedy, keď je rovina α určená ľubovoľnou nekolineárnou trojicou bodov alebo ľubovoľnými dvoma komplanárnymi priamkami. V takom prípade najprv zostrojíme v danej rovine hlavné priamky s kótami z^A, z^B, čím sa dosiahne aktuálne zadanie z úlohy 4.3a.

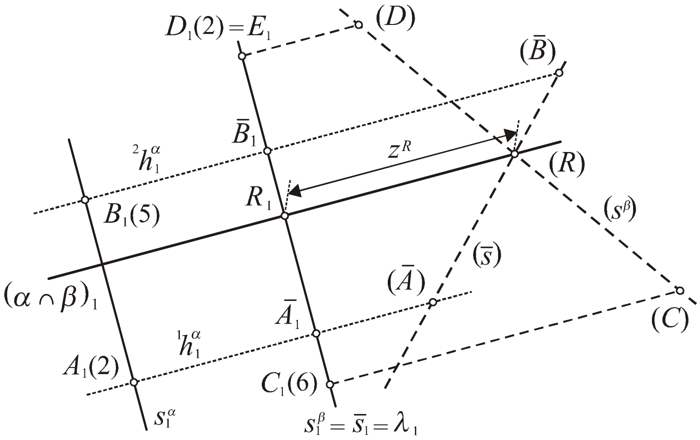
poloha 3-och navzájom rôznych rovín π, α, β – prípad 2c [1]) a stačí zostrojiť jeden jej bod. Na obr. 19 je zostrojený priesečník spádovej priamky s^β roviny β s rovinou α analogicky s konštrukciou v úlohe 4.3 (použitím premietacej roviny priamky s^β). Preto vyjadríme len symbolický zápis riešenia.

1. $s^\beta \cap \alpha$:

λ; $s^\beta \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi \rightarrow s^\beta \cap \alpha = s^\beta \cap (\lambda \cap \alpha) = s^\beta \cap \bar{s} \Rightarrow \lambda_1 = s_1^\beta = \bar{s}_1$

Priamka $\bar{s}$ je spádová priamka roviny α. Dourčíme ju bodmi $\bar{A}, \bar{B}$, ktoré ležia s bodmi A, B (v danom poradí) na tej istej hlavnej priamke: $z^{\bar{A}} = z^A$, $z^{\bar{B}} = z^B$. Spoločný bod $R = s^\beta \cap \bar{s}$ zostrojíme pomocou sklopenia roviny λ: $R = (R_1, z^R)$, $z^R = |R_1(R)|$ ($z^R > 0$, pretože bod R leží v rovinnom páse určenom hlavnými priamkami roviny α s kótami $z^A = 2$, $z^B = 5$).

2. $\alpha \cap \beta$; $R \in \alpha \cap \beta \wedge \alpha \cap \beta \parallel {}^i h^\alpha$ (kóta hlavnej priamky $\alpha \cap \beta$ sa rovná z^R).



Obr, 19

3. *Viditeľnosť polrovín oboch rovín s hranicou v priesečnici rovín*

Stačí overiť viditeľnosť ľubovoľného bodu jednej z polrovín niektorej z daných rovín, ktorý neleží na priesečnici rovín. Nech napr. $D_1 = E_1$ ($E \in \alpha$, $D \in \beta$). Platí: $z^E > 5$ (prečo?), $z^D = 2$, t. j. $z^E > z^D$ a viditeľná je polrovina roviny α (s hranicou v priesečnici rovín) prechádzajúca bodom E. Odtiaľ vyplýva viditeľnosť tej polroviny roviny β, ktorá obsahuje bod C.

Úloha 4.5

Zostrojte priečku mimobežných priamok a, b prechádzajúcu bodom M. (Priamka b je rovnobežná s priemetňou: $b = (b_1, z^b)$; $a = \leftrightarrow AB$ a body A, B, M sú určené okótovanými priemetmi.)

Stereometrické riešenie úlohy

Ak priečka r priamok a, b existuje, tak leží napr. v rovine $\alpha = \leftrightarrow aM$ a jeden jej bod je priesečník priamky b s touto rovinou. (Rovina α je množinou bodov všetkých priečok priamky a, ktoré prechádzajú bodom M – s výnimkou bodov priamky prechádzajúcej bodom M a rovnobežnej s priamkou a ([1])). Algoritmus riešenia úlohy je teda nasledovný:

1. α; $\alpha = \leftrightarrow aM$;

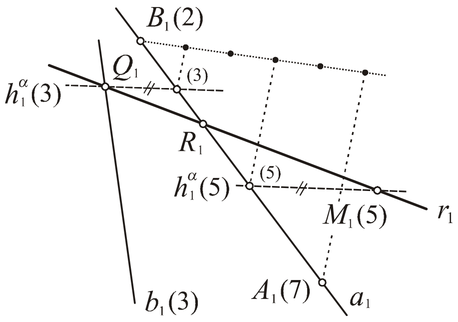
2. Q; $Q = b \cap \alpha$;

3. $r = \leftrightarrow MQ$.

Riešenie úlohy v nákresni

1. Zostrojme v rovine α hlavnú priamku, ktorá prechádza bodom M, t. j. hlavnú priamku s kótou $z = z^M = 5j$. Ďalším bodom tejto hlavnej priamky je bod priamky a s kótou 5; možno ho zostrojiť napríklad vystupňovaním priamky a. (Obr. 20)

2. Priesečník Q priamky b s rovinou α je bod s kótou rovnajúcou sa kóte priamky b, ktorá je rovnobežná s priemetňou. Priamka b pretína práve hlavnú priamku roviny α s kótou $z^B = 3$.[26] Teda: $Q = b \cap h^{\alpha}(3)$, t. j. $Q_1 = b_1 \cap h_1^{\alpha}(3)$.



Obr. 20

3. Priamka $r = \overleftrightarrow{MQ}$ je vo zvolenom prípade rôznobežná aj s mimobežkou a ($r \cap a = R$), je teda priečkou priamok a, b. Riešením úlohy je priamka $r = \overleftrightarrow{MQ}$, $M = (M_1, 5)$, $Q = (Q_1, 3)$. (Ak by bolo treba zostrojiť dĺžku úsečky RQ (t. j. dĺžku úsečky vyťatej na priečke oboma mimobežkami), použili by sme sklopenie premietacej roviny priečky r.)

Úloha 4.6

Zostrojte priečku priamok a, b, ktorá je rovnobežná s priamkou l.
($a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$, $l \parallel \pi$; body A, B, C, D sú dané okótovanými priemetmi.)

Stereometrické riešenie úlohy

Ak priečka r priamok a, b existuje, tak leží v rovine α, ktorá prechádza jednou z mimobežiek a je rovnobežná s danou priamkou l (napr. $b \subset \alpha \wedge \alpha \parallel l$). Jedným bodom priečky r je priesečník druhej z mimobežiek s rovinou α: $Q = a \cap \alpha$. Priečka r prechádza bodom Q a je rovnobežná s priamkou l.

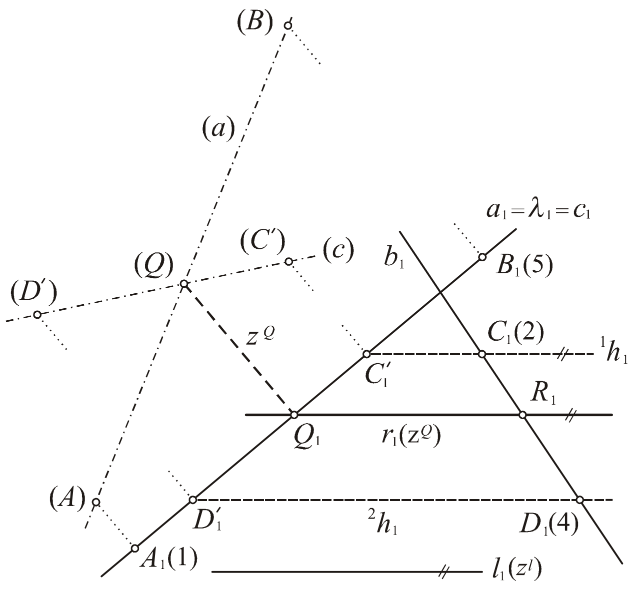
Riešenie úlohy v nákresni (obr. 21)

1. Rovina α je určená priamkou b a priamkou, ktorá prechádza napr. bodom C ($C \in b$) a je rovnobežná s priamkou l. Pretože priamka l je rovnobežná s priemetňou, je zostrojená rovnobežka hlavnou priamkou ${}^1h$ roviny α. Vzhľadom na riešenie ďalšej úlohy – konštrukcia priesečníka ($a \cap \alpha$), zostrojme v rovine α aj hlavnú priamku ${}^2h$ prechádzajúcu bodom D.

2. Priesečník priamky a s rovinou α zostrojíme pomocou sklopenia kolmo premietacej roviny λ priamky a analogicky s riešením úlohy 4.3:
$a \cap \alpha = a \cap (\lambda \cap \alpha) = Q$, kde $\lambda \cap \alpha = c = \overleftrightarrow{C'D'}$ je krycia priamka priamky a a $C' = {}^1h \cap c$, $D' = {}^2h \cap c$, (t. j. $z^{C'} = 2, z^{D'} = 4$). Bod R je priesečník priečky r s mimobežkou b.

3. Riešením úlohy je priamka $r = \overleftrightarrow{QR}$ ($Q_1 \in r_1 \wedge r_1 \parallel l_1$; $z^R = z^Q = |(Q)Q_1|$). Pre dĺžku úsečky vyťatej na priečke oboma mimobežkami platí: $|QR| = |Q_1R_1|$ (prečo?).

[26] Podľa všeobecného algoritmu riešenia úlohy o vzájomnej polohe priamky s rovinou táto konštrukcia zodpovedá voľbe roviny π' tak, aby prechádzala priamkou b. Potom: $b \cap \alpha = b \cap (\pi' \cap \alpha) = b \cap h^{\alpha}(3) = \{Q\}$.



Obr. 21

Úloha 4.7

Zostrojte prienik úplného trojuholníka *ABC*[27] roviny α s rovinným pásom určeným priamkami *m*, *n* roviny β ($\alpha \# \beta$). (Body *A*, *B*, *C* sú dané okótovanými priemetmi; analogicky sú dané priamky *m*, *n*, ktoré sú hlavnými priamkami roviny β.)

Stereometrické riešenie úlohy

Prienikom dvoch rovinných útvarov ${}^1U \subset \alpha$, ${}^2U \subset \beta$ rozumieme množinu všetkých spoločných bodov oboch útvarov (označenie: ${}^1U \cap {}^2U$). Zrejme platí: ${}^1U \cap {}^2U \subset \alpha \cap \beta$.[28] Odtiaľ vyplýva nasledujúca konštrukcia:

1. Konštrukcia priesečnice rovín útvarov;

2. Vyznačenie úsečky incidentnej s priesečnicou rovín, ktorá patrí obom útvarom;

3. Určenie vzájomnej viditeľnosti útvarov.

Nasledujúci obrázok ilustruje tri typy prienikov dvoch rovinných útvarov (konkrétne dvoch trojuholníkov) ${}^1U \subset \alpha$, ${}^2U \subset \beta$. (Obr. 22a – c)

Definícia 4.1

Nech pre útvary ${}^1U \subset \alpha$, ${}^2U \subset \beta$ platí: ${}^1U \cap {}^2U = XY$. Hovoríme, že ide o *úplný prienik*, resp. *zásek*, resp. *prienik s dvojnásobným bodom* práve vtedy, keď oba krajné body *X*, *Y* prieniku sú bodmi hranice toho istého útvaru (obr. 22a), resp. jeden z krajných bodov prieniku

---

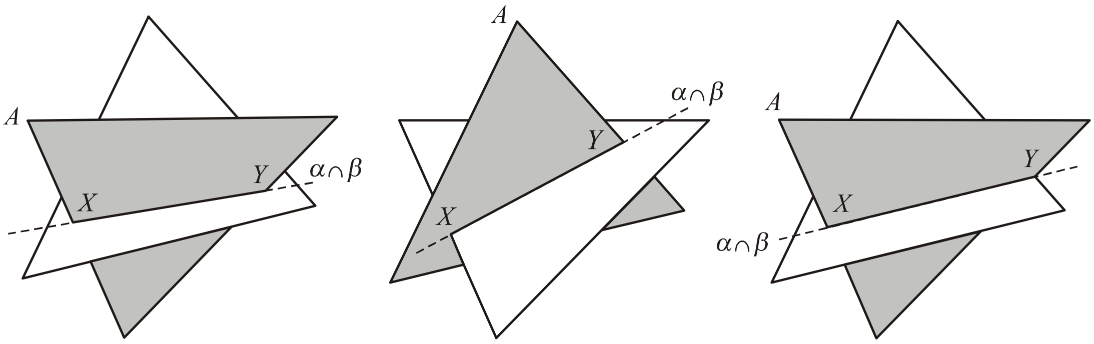
[27] *Úplný* trojuholník je pracovným termínom, ktorý označuje zjednotenie trojuholníka s jeho vnútrom. V geometrii sa termín trojuholník používa v dvoch významoch, a to ako uzavretá lomená čiara alebo sa trojuholník chápe i s jeho vnútrom. Používanie pojmu v druhom význame – t. j. trojuholník/vypuklý *n*-uholník ako konvexný obal konečnej množiny bodov – je nevyhnutné napríklad pri odvodzovaní obsahov rovinných mnohouholníkov ([5], kap. 9) a je prirodzené v úlohách o prienikoch dvoch rovinných útvarov ležiacich v navzájom rôznych rovinách.

[28] Vo všetkých zadaniach sú útvary ${}^1U$, ${}^2U$ zvolené tak, aby ich prienikom bola viac než jednobodová množina nepatriaca hranici žiadneho z útvarov. Obmedzením sa na konvexné útvary s hranicou (pre začiatok *n*-uholníky, prípadne vhodné polroviny) dosiahneme, že ${}^1U \cap {}^2U$ je úsečka.

je bodom hranice jedného útvaru a druhý krajný bod patrí hranici druhého útvaru (obr. 22b), resp. aspoň jeden z bodov X, Y patrí hranici oboch útvarov (na obrázku 22c je bod Y dvojnásobným bodom prieniku).[29]

Poznámka 4.2.

Na všetkých obrázkoch (22a – c) je vrchol A viditeľným vrcholom vzhľadom na tú z rovín, v ktorej neleží. Ak označíme $r = \alpha \cap \beta$, tak z viditeľnosti bodu A ($A \in {}^1U$) vyplýva viditeľnosť polroviny $^{\mapsto}rA$ roviny α; viditeľnosť každej z troch zvyšných polrovín v úlohe je týmto faktom určená (riešenie úlohy 4.4). Teda zo zvoleného útvaru je viditeľná časť, ktorá patrí viditeľnej polrovine roviny s ním incidentnej a ešte tá jeho časť, ktorá síce leží v neviditeľnej polrovine, ale nie je „zakrytá“ zvyšným útvarom.



Obr. 22a, b, c

Po vysvetlení pojmov pokračujeme v riešení úlohy 4.7.

Riešenie úlohy v nákresni (obr. 23)

1. Konštrukcia priesečnice rovín α, β

Pretože poznáme v oboch rovinách hlavné priamky (v rovine α je priamka $^{\leftrightarrow}BC$ hlavná priamka s kótou 10j, v rovine β sú hlavnými priamkami priamky m, resp. n s kótami $z^m = 7j$, resp. $z^n = 5j$), zostrojíme priesečnicu rovín podľa úlohy 4.4. Stačí zostrojiť napr. v rovine α hlavné priamky ${}^1h$, resp. ${}^2h$ tak, aby sa ich kóty rovnali 5j, resp. 7j; body hlavných priamok ${}^ih$ (i = 1, 2) zostrojíme vystupňovaním napr. priamky AC (na obrázku sú označené len kóty bodov stupnice).[30] Priesečnica rovín je určená bodmi K, L, kde $K = n \cap {}^1h$ $(K_1 = n_1 \cap {}^1h_1 \wedge z^K = 5j)$, $L = m \cap {}^2h$ $(L_1 = m_1 \cap {}^2h_1 \wedge z^L = 7j)$.

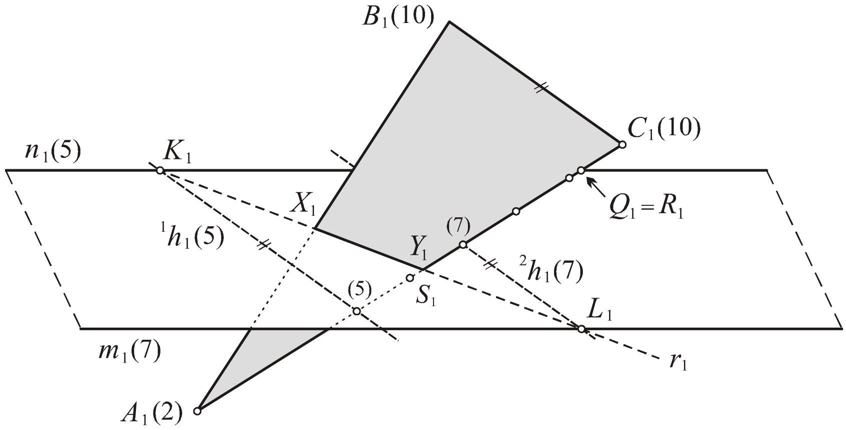
2. Označme $r = {}^{\leftrightarrow}KL$ a zvýraznime úsečku $XY \subset r$ patriacu obom útvarom. Ide o úplný prienik ($X \in AB$, $Y \in AC$), t. j. ${}^1U \cap {}^2U = XY$. (Kóty bodov X, Y nie je potrebné zisťovať.)

3. Určenie viditeľnosti

Vezmime si dva body Q, R na tej istej premietacej priamke tak, aby napr. $Q \in {}^1U$, $R \in {}^2U$ (najlepšie na hranici oboch útvarov). Na obr. 23 bod Q leží na priamke $^{\leftrightarrow}AC$ a bod R je bodom priamky n ($Q_1 = R_1$). Pre kóty bodov Q, R platí: $z^Q > 7$ (bod Q leží medzi hlavnými priamkami roviny α s kótami 7 a 10), $z^R = 5$. Teda $z^Q > z^R$ a viditeľná je polrovina $^{\mapsto}rQ$ roviny trojuholníka ABC. *Otvorená* polrovina $(^{\mapsto}rR)^{\circ}$ polroviny $^{\mapsto}rR$ roviny β ([5]) viditeľná nie je, t. j. v rovine rovinného pásu je viditeľná polrovina opačná k polrovine $^{\mapsto}rR$. Priamka

[29] Dvojnásobné body prieniku môžu byť i dva. Načrtnite si obrázok.
[30] Stred S úsečky AC má kótu $(10j + 2j)/2 = 6j$, stred úsečky SC analogicky má kótu 8j, odkiaľ je zrejmá konštrukcia jedného intervalu priamky AC a následne bodov s kótami 7j, 5j.

m je viditeľná celá, pretože tá časť z nej, ktorá patrí do neviditeľnej polroviny $(^{\mapsto}rR)^{\circ}$ (roviny β) nie je „zakrytá" (vzhľadom na kolmé premietanie do roviny π) viditeľnou časťou úplného trojuholníka *ABC*.



Obr. 23

5. Metóda riešenia metrických úloh v kótovanom zobrazení

Všetky úlohy, ktoré riešime v nejakej zobrazovacej metóde, sú úlohy o základných objektoch o telesách trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$, prípadne rozšíreného euklidovského priestoru $\overline{\boldsymbol{E}}_{3.}$. Ide o *stereometrické* úlohy. Základom riešenia polohovej či metrickej úlohy v stereometrii je prevedenie úlohy na planimetrickú úlohu alebo na postupnosť planimetrických úloh.

Metrické úlohy o útvaroch tej istej roviny možno z hľadiska zobrazovacích metód zaradiť do dvoch skupín:

a) úlohy o *konštrukcii obrazu* rovinného útvaru/konfigurácie rovinných útvarov (ktoré majú určité požadované vlastnosti) *vo zvolenej zobrazovacej metóde*;

b) úlohy o *rekonštrukcii originálneho rovinného útvaru* z jeho obrazu v danej zobrazovacej metóde.

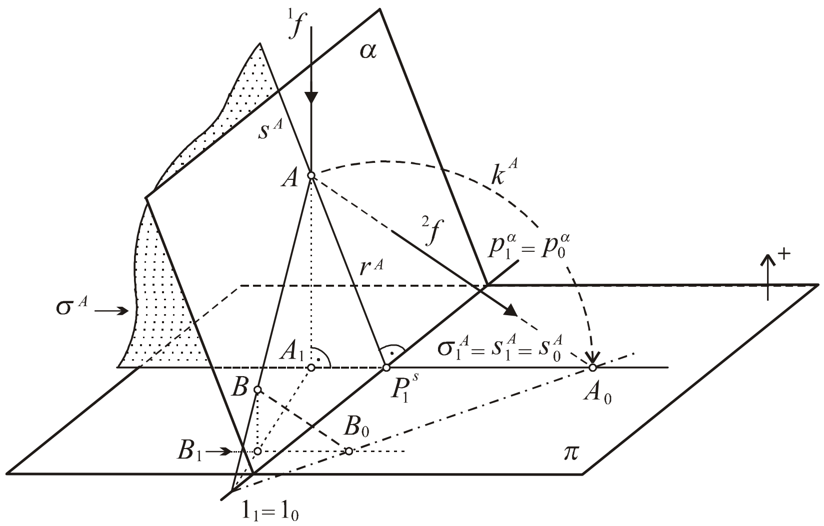
Obe tieto úlohy sa riešia *metódou otáčania* predmetnej *roviny* do priemetne alebo do roviny rovnobežnej s priemetňou (do úrovne). V paragrafe 2 sme sa oboznámili s otáčaním roviny kolmej na priemetňu π (sklápanie roviny). Teraz si vysvetlíme otáčanie roviny vo všeobecnej polohe, teda roviny, ktorá nie je kolmá na priemetňu ani s ňou rovnobežná. Pravouhlé priemety útvarov v rovine, ktorá je s priemetňou rovnobežná, sú zhodné s originálmi (konštrukcie preto možno vykonať priamo na priemetoch útvarov). Základné pojmy súvisisace s otáčaním roviny boli už uvedené v par. 2 pre špeciálny prípad otáčania, ktorým je sklápanie roviny.

5. 1 Otáčanie roviny vo všeobecnej polohe do priemetne

Nech $\alpha\,(\alpha \not\perp \pi,\ \alpha \not\parallel \pi)$ je ľubovoľná rovina. *Osou otáčania roviny* je priesečnica roviny s priemetňou, teda stopa p^{α} danej roviny. Nech je *A* ľubovoľný bod roviny α neležiaci na osi otáčania roviny. *Rovina otáčania bodu A* prechádza bodom *A* a je kolmá na os otáčania (označenie: σ^{A}). Teda:

$A \in \sigma^A \wedge \sigma^A \perp p^\alpha$ (1)

Zo vzťahu (1) vyplýva, že každá priamka roviny σ^A je kolmá na stopu roviny, teda aj jej priesečnice s rovinami α a π. Priesečnica s rovinou α je ale spádovou priamkou tejto roviny (prechádzajúcou bodom A) (označenie: $s^A = \sigma^A \cap \alpha$). Navyše je rovina σ^A kolmá na priemetňu ($\sigma^A \perp p^\alpha \Rightarrow \sigma^A \perp \pi$), t. j. priamka $\sigma^A \cap \pi$ je kolmým priemetom roviny σ^A do priemetne ($\sigma^A \cap \pi = \sigma_1^A$). Otočené polohy útvarov budeme označovať indexom „0" vpravo dolu k názvu útvaru. Potom sú zrejmé identity: $\sigma_1^A = s_1^A = s_0^A$ a $A_0 \in s_0^A$. (Obr. 24)



Obr. 24

$$\begin{tikzcd} (\alpha) \arrow[r, "{}^1f"] \arrow[d, "{}^2f"'] & (\alpha_1) \\ (\alpha_0) & \end{tikzcd}$$

diagram

Stredom otáčania bodu A je bod $\sigma^A \cap p^\alpha = P^s$ (stopník spádovej priamky s^A); *polomer* r^A otočenia bodu A sa rovná úsečke AP^s a kružnica otočenia bodu A je kružnica $k^A(P^s; r^A)$ roviny σ^A. Takéto otočenia sú dve; otočenou polohou bodu A je jeden z priesečníkov kružnice otočenia bodu A s priemetňou, t. j. jeden z bodov $k^A \cap \sigma_1^A$. Na obrázku je označený jeden z nich (A_0). Pre bod A_0 platí: $A_0 \in \sigma_1^A \wedge |P_1^s A_0| = |r^A|$. Konštrukcia úsečky AP^s sa urobí pomocou sklopenia roviny σ^A do priemetne.

Pri zostrojovaní otočených polôh ďalších bodov už *nie je potrebné* vykonať opísanú konštrukciu (netreba zostrojovať polomery otáčania bodov), pretože platí:

Veta 5.1

Medzi pravouhlými priemetmi bodov roviny α ($\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \nparallel \pi$) a otočenými polohami týchto bodov v otáčaní roviny α do priemetne π je vzťah pravouhlej perspektívnej afinity, ktorej osou je priemet p_1^α stopy roviny α; usporiadanú dvojicu bodov *vzor – obraz* tvorí dvojica bodov A_1, A_0 (pre ľubovoľný bod A roviny α neležiaci na jej stope).

Dôkaz

Nech ${}^1f$ je kolmé premietanie bodov roviny α do priemetne π a ${}^2f$ zhodnostné zobrazenie, ktoré je otočením roviny α do roviny π (${}^1f$: $(\alpha) \to (\alpha_1)$, ${}^2f$: $(\alpha) \to (\alpha_0)$). Každé otočenie jednej roviny do druhej možno nahradiť rovnobežným premietaním [4]; osnova premietania je kolmá na vhodnú rovinu súmernosti rovín α a π. (Dokážte!) Vzťah rovinných polí (α), (α_1) a (α_0) vyplýva z diagramu pripojenému k obrázku 24. Z neho je zrejmé, že zobrazenie:

$${}^{2}f \circ {}^{1}f^{-1} : (\alpha_1) \to (\alpha_0)$$

je afinitou (obe zložky kompozície sú bijektívne afinné zobrazenia) a pre všetky body priesečnice rovín π, α (t. j. priamky $p^{\alpha} = p_1^{\alpha}$) platí, že sú *samodružnými* (= invariantnými) bodmi v oboch zobrazeniach ${}^{1}f^{-1}$, ${}^{2}f$, teda aj v ich kompozícii. Pretože každý bod prianky p_1^{α} je v afinite ${}^{2}f \circ {}^{1}f^{-1}$ samodružný, ide o perspektívnu afinitu dvoch súmiestnych rovinných polí ([4], definícia 1.3). Hovoríme o *perspektívnej afinite otočenia* roviny. Navyše je priamka $\overleftrightarrow{A_1A_0}$ kolmá na priamku p_1^{α} (pre každý bod A roviny α neležiaci na jej stope p^{α}); ide teda o *pravouhlú* perspektívnu afinitu. Jej použitie ilustruje riešenie nasledujúcej jednoduchej úlohy.

Úloha 5.1

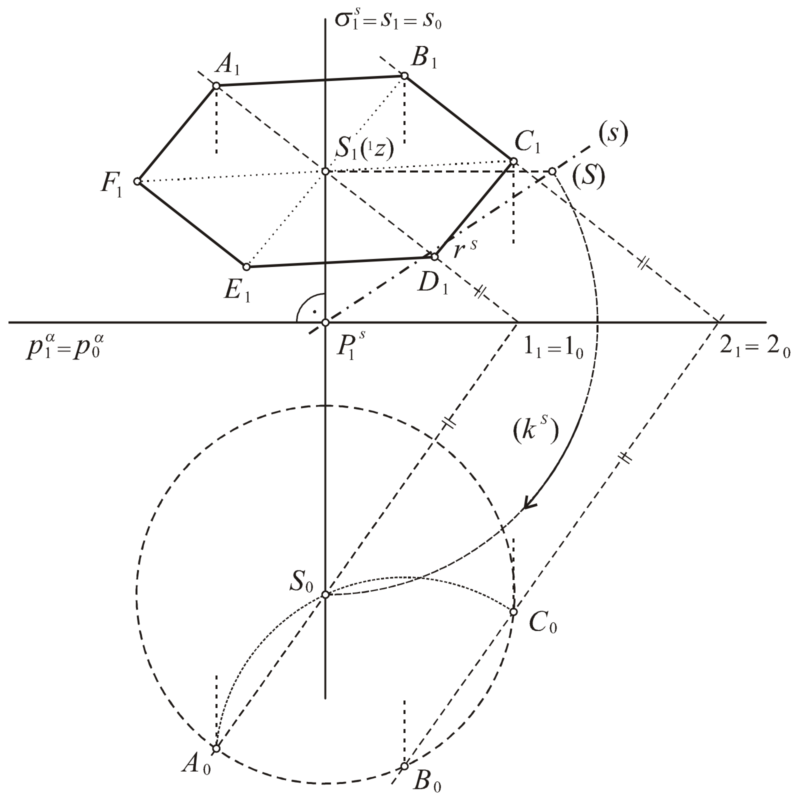
Daná je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{p^{\alpha}S}$ a jej ľubovoľný bod A ($A \neq S$). Zostrojte v tejto rovine pravidelný šesťuholník so stredom S a jedným vrcholom A. (Daná je priamka p_1^{α}, okótovaný priemet bodu S a pravouhlý priemet bodu A, t. j. $S = (S_1, {}^{1}z)$, $A = (A_1, ?)$.)

Poznámka 5.1

Pod úlohou „*Zostrojte geometrický útvar U požadovaných vlastností*“ budeme všade ďalej rozumieť konštrukciu *obrazu* útvaru *U* vo zvolenej zobrazovacej metóde; pre všetky úlohy v tejto kapitole ide o kótované zobrazenie s priemetňou v rovine π.

Riešenie úlohy 5.1

Metódou riešenia úlohy je otočenie roviny do priemetne. Podľa vety 5.1 platí: Existuje pravouhlá perspektívna afinita f: $(\alpha_1) \to (\alpha_0)$, ktorej osou je priamka p_1^{α}; túto afinitu dourčíme usporiadanou dvojicou bodov S_1, S_0. Konštrukcia otočenej polohy bodu S je znázornená na obr. 25.



Obr. 25

1. Zostrojíme priemet roviny otáčania bodu S $(S \in \sigma^S \wedge \sigma^S \perp p^\alpha \Rightarrow S_1 \in \sigma_1^S \wedge \sigma_1^S \perp p_1^\alpha)$. Pre spádovú priamku priamku s roviny α, ktorá prechádza bodom S platí: $s_1 = \sigma_1^S = s_0$; táto spádová priamka je určená bodom S a stopníkom P^s ($P^s = s \cap p^\alpha$).

2. Polomer otáčania bodu S je úsečka $r^s = SP^s$; zostrojíme ju pomocou sklopenia roviny σ^S do priemetne.

3. Stred otáčania bodu S je stopník P^s spádovej priamky s a kružnica otáčania bodu S je kružnica $k^S(P^s; r^S) \subset \sigma^S$ (na obrázku je znázornená sklopená poloha časti tejto kružnice). Konštrukcia bodu S_0 (t. j. *otočenej polohy bodu S*) je zrejmá $(S_0 \in s^0 \wedge P_1^S S_0 \cong r^S \cong (S)P_1^s)$.

4. Perspektívna afinita f zobrazí bod A_1 do bodu A_0 (bod A_0 je zostrojený pomocou samodružného bodu $1_1 = 1_0$ priamky A_1S_1). $A_0B_0C_0 \ldots F_0$ je pravidelný šesťuholník so stredom S_0 a jeho obraz v inverznej afinite f^{-1} je riešením úlohy $(f^{-1}: A_0B_0C_0 \ldots F_0 \mapsto A_1B_1C_1 \ldots F_1)$.

Pretože ide o pravidelný šesťuholník, stačí v otočenej polohe zostrojiť – okrem určujúcich prvkov S_0, A_0 – ešte jeden ďalší vrchol susedný s vrcholom A_0, napr. vrchol B_0.[31] Na obrázku 25 je zostrojený i vrchol C_0; Ten totiž leží s vrcholom B_0 na priamke rovnobežnej s priamkou $\overleftrightarrow{A_0S_0}$ (obsahujúcou uhlopriečku otočenej polohy konštruovaného šesťuholníka) a na konštrukciu otočenej polohy bodu A a pravouhlých priemetov bodov B, C stačí použiť samodružné body $1_1 = 1_0$, $2_1 = 2_0$ spomenutých rovnobežiek, rovnobežnosť priemetov a poznatok, že ide o pravouhlú afinitu. Priemety zvyšných vrcholov doplníme na základe invariantnosti pomerov usporiadaných trojíc kolineárnych bodov: $(ADS) = (BES) = (CFS) = -1$ (pravidelný šesťuholník má stred súmernosti, čo platí aj o jeho obraze v ľubovoľnej afinite). Následne sú i všetky dvojice protiľahlých strán šesťuholníka $A_1B_1C_1 \ldots F_1$ navzájom rovnobežné zhodné úsečky.

Poznámka 5.2

Existujú dve perspektívne afinity otáčania roviny. Kladná polrovina roviny α[32] sa totiž môže otočiť do ľubovoľnej z polrovín priemetne s hranicou p^α. V záujme prehľadnosti konštrukcie sa snažíme zvoliť to z oboch otáčaní, pre ktoré sa pravouhlé priemety útvarov neprekrývajú s otočenými polohami týchto útvarov. Tejto podmienke sa nedá vyhovieť vždy; zobrazovaný útvar nemusí ležať celý v jednej polrovine roviny α s hranicou v stope roviny. Preto si ešte vysvetlíme otáčanie roviny do úrovne (analogicky ako pri sklápaní roviny), keď pri vhodnej voľbe osi otáčania roviny môže byť táto požiadavka akceptovaná.

5.2 Otáčanie roviny vo všeobecnej polohe do úrovne $\pi' (\pi' \parallel \pi \wedge \pi' \neq \pi)$

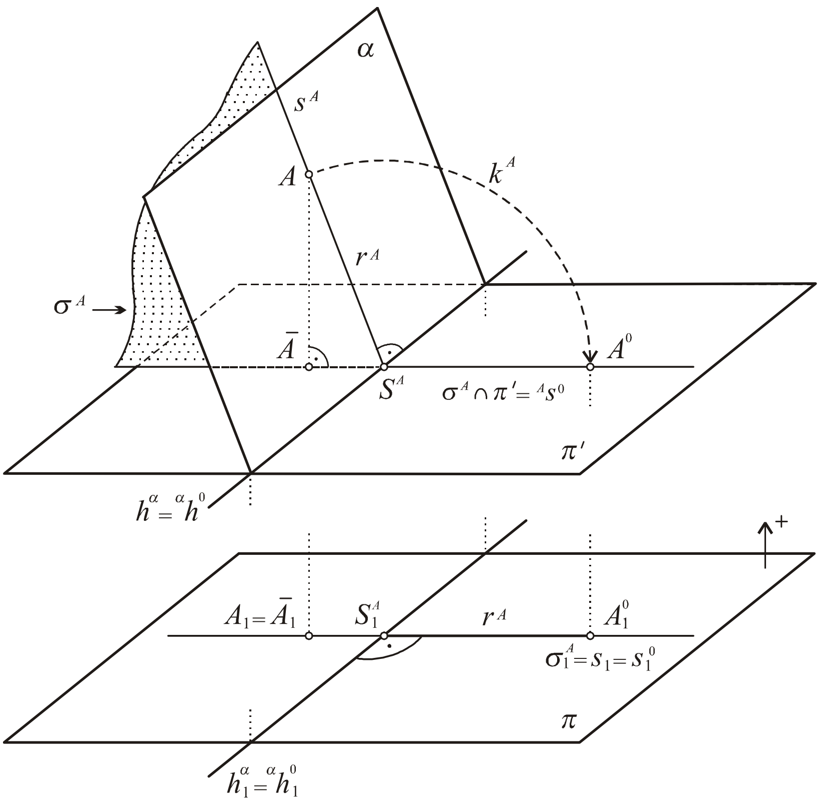
Nech π' je ľubovoľná rovina požadovaných vlastností. Len stručne si pripomeňme všetky pojmy súvisiace s otáčaním roviny α do úrovne π':

Os otáčania roviny α $(\alpha \not\perp \pi,\ \alpha \nparallel \pi)$ je príslušná hlavná priamka roviny v úrovni, t. j. priamka $h^\alpha = \alpha \cap \pi'$; *rovina otočenia* ľubovoľného *bodu A* $(A \in \alpha \wedge A \notin h^\alpha)$ je rovina σ^A prechádzajúca bodom A a kolmá na os otáčania h^α; *stred otočenia bodu A* je bod

[31] Útvar $S_0A_0B_0C_0$ je totiž rovnobežníkom, špeciálne kosoštvorcom (odôvodnite), odkiaľ vyplýva, že i útvar $S_1A_1B_1C_1$ je rovnobežník.

[32] Ide o polrovinu roviny α, ktorá leží v príslušnom kladnom polpriestore s hranicou π.

S^A ($S^A = h^\alpha \cap \sigma^A$); *polomer* r^A *otočenia bodu A* je úsečka AS^A a *kružnica* k^A *otočenia bodu A* leží v rovine σ^A ($k^A = (S^A; r^A)$). Pre otočené polohy bodov platia analogické vzťahy ako pri otáčaní roviny do priemetne – budeme ich označovať indexom „0“ vpravo hore (obr. 26). Potom platí: $\sigma^A \cap \pi' = s^0$ (s^0 je otočená poloha spádovej priamky *s* roviny, ktorá prechádza bodom *A*) a $A^0 = k^A \cap s^0$. Taktiež v rovine π' existuje perspektívna afinita medzi pravouhlými priemetmi bodov roviny α do úrovne π' a otočenými polohami týchto bodov. (Na obrázku je kolmý priemet bodu *A* do roviny π' označený $\overline{A}$, teda príslušná perspektívna afinita je určená osou $h^\alpha = {}^\alpha h^0$ a usporiadanou dvojicou bodov $\overline{A}$, A^0.)



$$\begin{tikzcd}
(\alpha) \arrow[r, "{}^1f"] \arrow[d, "{}^2f"'] & (\alpha^0) \arrow[d, "{}^2f"] \\
(\alpha_1) & (\alpha_1^0)
\end{tikzcd}$$

Obr. 26 diagram 2

Spomenutú perspektívnu afinitu však nemôžeme použiť, pretože rovina π' je pre nás „nedostupná“; môžeme konštruovať len pravouhlé priemety útvarov tejto roviny. To je dostačujúce, pretože rovina π' je rovnobežná s priemetňou a teda pravouhlé priemety (do priemetne π) útvarov ležiacich v rovine π' sú zhodné s originálmi. Ešte dokážeme, že i medzi pravouhlými priemetmi (do priemetne) bodov roviny α a priemetmi otočených polôh týchto bodov (v príslušnom otáčaní roviny α do úrovne) je vzťah perspektívnej afinity. Vzťah rovinných polí (α), (α^0), (α_1) a (α_1^0) ozrejmuje diagram 2, v ktorom ${}^1f$ je otočenie roviny α do roviny π' a ${}^2f$ je kolmé premietanie do priemetne π. Potom zobrazenie ${}^2f \circ {}^1f \circ ({}^2f/\alpha)^{-1} = f$ zobrazí rovinné pole (α_1) do rovinného poľa (α_1^0). Zobrazenie ${}^2f/\alpha$ je zúžením premietania ${}^2f$ na rovinu α, t. j. ide o afinitu a existuje k nemu inverzné zobrazenie $({}^2f/\alpha)^{-1}$. Všetky zložky kompozície *f* sú afinity medzi dvoma rovinami, odkiaľ vyplýva, že zobrazenie *f* je afinitou v priemetni π. Dôkaz, že táto afinita má silno samodružnú priamku v priamke h_1^α sa necháva čitateľovi. Platí teda:

Veta 5.2

Medzi pravouhlými priemetmi (do priemetne π) bodov roviny α ($\alpha \perp \pi$, $\alpha \# \pi$) a pravouhlými priemetmi otočených polôh týchto bodov v otočení roviny α do úrovne je vzťah pravouhlej perspektívnej afinity, ktorej osou je pravouhlý priemet príslušnej hlavnej priamky roviny α v úrovni. (Symbolicky: $f(h_1^\alpha;\ A_1, A_1^0)$, $f: U_1 \mapsto U_1^0$ $(U \subset \alpha)$)

Úloha 5.2

Daný je obraz trojuholníka *ABC* okótovanými priemetmi jeho vrcholov. Zostrojte trojuholník zhodný s originálnym trojuholníkom.

Riešenie úlohy

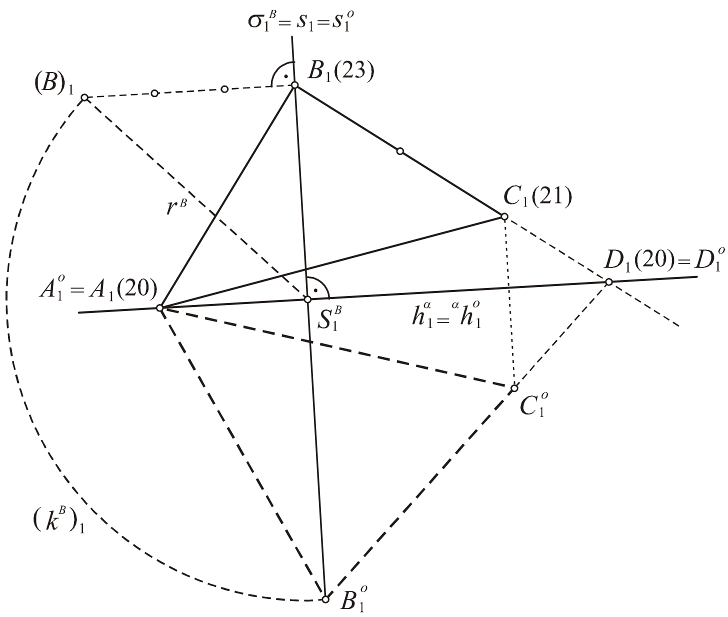
Úlohu budeme riešiť *metódou otočenia roviny* α trojuholníka *ABC*. Pretože kóty vrcholov trojuholníka sú veľké čísla, použijeme otočenie roviny α do úrovne π' (napr. $z^{\pi'} = 20$). Podľa vety 5.2 existuje pravouhlá perspektívna afinita *f* (afinita otočenia roviny) tak, že platí:

$$f: (\alpha_1) \to (\alpha_1^0),$$

ktorá je určená osou h_1^α (kóta hlavnej priamky h^α sa rovná 20) a usporiadanou dvojicou bodov vzor – obraz neležiacich na osi (napr. B_1, B_1^0).[33] (Obr. 27)

Riešenie úlohy v nákresni

1. Najprv zostrojíme priemet hlavnej priamky h^α v úrovni π'. Jeden bod hlavnej priamky h^α je bod *A* ($z^A = 20$), jej ďalším bodom je bod *D* priamky *BC* s kótou 20 (určíme ho vystupňovaním priamky $a = \overleftrightarrow{BC}$ ($|B_1C_1| = 2i_a$)).



Obr. 27

[33] Bod *B* sme vybrali preto, lebo vzdialenosť jeho priemetu od osi afinity je väčšia, než vzdialenosť bodu C_1 od tejto priamky, čo je zárukou väčšej presnosti konštrukcie.

2. Pre priemet roviny otáčania bodu B platí: $B_1 \in \sigma_1^B \wedge \sigma_1^B \perp h_1^\alpha$. Polomer otočenia bodu B ($r^B = BS^B$) zostrojíme v sklopení roviny σ^B do zvolenej úrovne: $S^B = \sigma^B \cap h^\alpha$, priamka $s = \overleftrightarrow{BS^B}$ je spádová priamka roviny α, prechádzajúca bodom B. Konštrukcia pravouhlého priemetu otočenej polohy bodu B je zrejmá: $B_1^0 \in s_1^0 \wedge S_1^B B_1^0 \cong r^B$. (Obr. 26, 27) Na obrázku 27 je zostrojený i oblúk pravouhlého priemetu sklopenej polohy časti kružnice otočenia bodu B.

3. Na konštrukciu pravouhlého priemetu otočenej polohy vrcholu C trojuholníka stačí použiť perspektívnu afinitu $f: f(C_1) = C_1^0$ (samodružný bod priamky B_1C_1 je bod $D_1 \in h_1^\alpha$).
Záver: $\Delta ABC \cong \Delta A_1^0 B_1^0 C_1^0$.

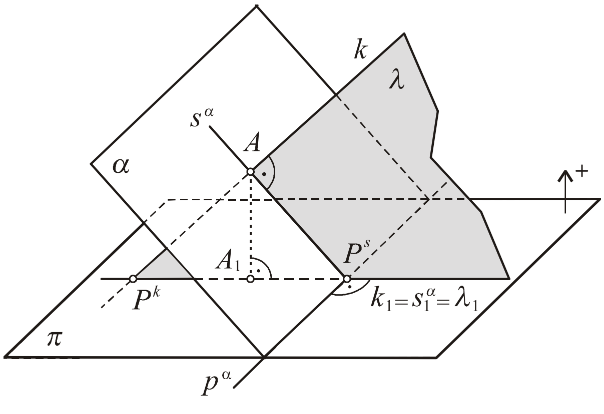
Riešenie takmer všetkých stereometrických metrických úloh priamo súvisí s konštrukciou priamky, ktorá je kolmá na danú rovinu. Dokážme si preto základnú vlastnosť kolmého priemetu kolmice na danú rovinu.

Veta 5.3
Pravouhlý priemet priamky k kolmej na rovinu α ($\alpha \# \pi$) je kolmý na pravouhlé priemety hlavných priamok tejto roviny, t. j. $k_1 \perp h_1^\alpha$.

Dôkaz
Označme si λ kolmo premietaciu rovinu priamky k ($k \perp \alpha$), t. j. $k \subset \lambda$; bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že priesečník A priamky k s rovinou α neleží na jej stope (prečo?). Teda $A \in k$, $A \neq A_1 \Rightarrow \lambda = \overleftrightarrow{kA_1}$ a platí:

$$k \perp \alpha \Rightarrow k \perp p^\alpha \qquad (1)$$
$$AA_1 \perp \pi \Rightarrow AA_1 \perp p^\alpha \qquad (2)$$
$$(1), (2) \Rightarrow \lambda \perp p^\alpha$$

To znamená, že i priamka $k_1 = \lambda \cap \pi$ je kolmá na priamku $p^\alpha = p_1^\alpha$. Záver je dôsledkom faktu, že stopa roviny α ($\alpha \# \pi$) patrí do osnovy hlavných priamok tejto roviny. (Obr. 28)



Obr. 28

Dôsledok 5.1
Pravouhlý priemet priamky k kolmej na rovinu α ($\alpha \# \pi, \alpha \not\perp \pi$) je totožný s pravouhlým priemetom jednej zo spádových priamok s^α roviny α (priamky k, s^α ležia v spoločnej premietacej rovine λ). Druhý bod kolmice na rovinu dourčíme jednoducho na základe kolmosti priamok k, s^α pomocou sklopenia roviny λ.

Úloha 5.3

Zostrojte priamku k prechádzajúcu daným bodom A a kolmú na rovinu α. (Rovina α je určená obrazom svojej spádovej priamky $s^\alpha = \overleftrightarrow{MN}$, body A, M, N sú dané okótovanými priemetmi.) (Obr. 29)

Riešenie úlohy

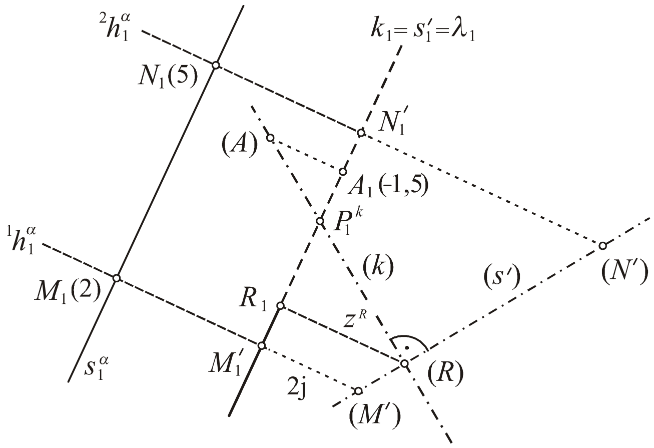
1. Rovina α má všeobecnú polohu ($\alpha \# \pi, \alpha \not\perp \pi$). Kolmý priemet priamky k ($A \in k \wedge k \perp \alpha$) má podľa vety 5.3 vlastnosti: $A_1 \in k_1 \wedge k_1 \perp h_1^\alpha$ (t. j. $k_1 \parallel s_1^\alpha$ (veta 3.3)). (Obr. 29a)

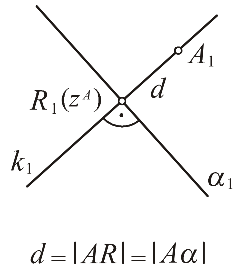
2. Premietacia rovina λ priamky k obsahuje spádovú priamku s' ($s' \parallel s^\alpha$) roviny α; túto spádovú priamku dourčíme pomocou jej priesečníkov s hlavnými priamkami ${}^1h$, *resp.* ${}^2h$, roviny α, ktoré prechádzajú napr. bodmi M, resp. N: ${}^1h \cap s' = M'$, ${}^2h \cap s' = N'$, t. j. $s' = \overleftrightarrow{M'N'}$. Sklopená poloha priamky k v sklopení roviny λ ($\lambda_1 = k_1 = s_1'$) do priemetne prechádza sklopenou polohou bodu A a je kolmá na sklopenú polohu priamky s'. Priamka k je určená bodom A a stopníkom P^k ($P_1^k = k_1 \cap (k)$).

3. V riešení niektorých úloh sa vyžaduje i konštrukcia päty kolmice k v rovine α, t. j. bodu $R = k \cap s'$ ($R = (R_1, z^R)$; $z^R > 2 \Rightarrow z^R = |R_1(R)|$). Dĺžka úsečky AR sa potom rovná vzdialenosti bodu A od danej roviny ($|AR| = |(A)(R)| = |A, \alpha|$) . (Vysvetlite.)

4. *Určenie viditeľnej polpriamky priamky k vzhľadom na rovinu* α

Na základe vety 3.2 majú priamky k a s' roviny λ opačne orientované stupnice. Odtiaľ vyplýva, že je viditeľná tá z polpriamok priamky k so začiatkom v bode R, ktorej body (okrem bodu R) majú väčšiu kótu než je kóta bodu R. Platí: $z^A < 0$, $z^R > 0$, teda polpriamka $\mapsto RA$ nie je viditeľná; viditeľná je polpriamka k nej opačná. [34]





Obr. 29a, b

Poznámka 5.3

a) Veta 5.3 platí aj pre rovinu, ktorá je kolmá na priemetňu. Priamka k ($k \perp \alpha$) je potom s priemetňou rovnobežná a jej kóta sa rovná kóte bodu A (sklápanie premietacej roviny priamky k stráca zmysel). Riešenie úlohy 5.3 je elementárne (vrátane konštrukcie päty kolmice a vzdialenosti bodu od roviny) a možno ho vykonať priamo v priemete. (Obr. 29b)

---

[34] Určovanie viditeľnosti polpriamky na priamke *kolmej na rovinu* sa týmto faktom zjednodušuje; netreba brať do úvahy bod spádovej priamky roviny, ktorý leží so zvoleným bodom kolmice na rovinu na tej istej premietacej priamke (vo zvolenej úlohe napr. s bodom A).

b) Kóty bodov A a bodov dostupnej časti spádovej priamky sa môžu „veľmi líšiť“ (absolútna hodnota rozdielu kót je veľké číslo) a opísaná konštrukcia sa v časti nákresne, ktorú máme k dispozícii nedá vykonať. V tom prípade zostrojíme kolmicu na danú rovinu ľubovoľným vhodným bodom, napr. jedným z daných bodov spádovej priamky roviny.[35] Riešením úlohy bude priamka prechádzajúca bodom A, ktorá je rovnobežná so zostrojenou kolmicou (úloha 4.1).

Úloha 5.4

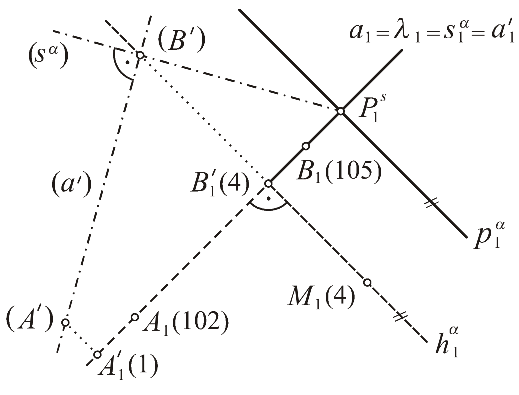
Zostrojte rovinu, ktorá prechádza daným bodom M a je kolmá na danú priamku $a = \overleftrightarrow{AB}$. (Body M, A, B sú dané okótovanými priemetmi.)

Riešenie úlohy

1. Na základe vety 5.3 môžeme zostrojiť priemet hlavnej priamky hľadanej roviny α, ktorá prechádza bodom M. Platí:

$$M \in \alpha \wedge \alpha \perp a \;\Rightarrow\; M_1 \in h_1^{\alpha}(z^M) \wedge h_1^{\alpha} \perp a_1 \text{ (obr. 30)}$$

2. Rovinu α dourčíme obrazom spádovej priamky s^{α}, ktorá leží s priamkou a v tej istej premietacej rovine λ $(a_1 = \lambda_1 = s_1^{\alpha},\ s^{\alpha} \perp a)$. Avšak rozdiel kót bodu A, resp. bodu B a kóty bodu M je v absolútnej hodnote číslo presahujúce možnosť konštrukcie sklopených polôh týchto bodov v nákresni; preto namiesto priamky a budeme uvažovať o priamke a', ktorá je s priamkou a rovnobežná a prechádza napr. priesečníkom B' spádovej priamky s^{α} s hlavnou priamkou h^{α} ($B' = h^{\alpha} \cap s^{\alpha}$, t. j. $z^{B'} = z^M = 4$). Priamku a' dourčíme podľa úlohy 4.1 ($a' = \overleftrightarrow{A'B'} \wedge |A_1'B_1'| = |A_1B_1| = 3i_a$; bod A' je zvolený tak, aby $z^{A'} = 1$)[36]. Konštrukcia sklopenej polohy spádovej priamky s^{α} v sklopení roviny λ do priemetne vyplýva z vlastnosti: $B' \in s^{\alpha} \wedge s^{\alpha} \perp a'$. Priesečník priamky s_1^{α} so sklopenou polohou priamky s^{α} je stopník P^s spádovej priamky hľadanej roviny ($P^s = P_1^s$). Rovinu α môžeme dourčiť jej stopou p^{α}, t. j. $\alpha = \overleftrightarrow{p^{\alpha}h^{\alpha}}$. V prípade nedostupnosti stopníka P^s sa pomocou sklopenej polohy spádovej priamky dourčí ľubovoľný ďalší bod tejto priamky.



Obr. 30

---

[35] Konštrukciu vykonáme pomocou sklopenia premietacej roviny spádovej priamky do priemetne alebo do úrovne – to závisí od kót bodov, ktorými je spádová priamka určená.

[36] Platí totiž: $\alpha \perp a' \wedge a' \parallel a \Rightarrow \alpha \perp a$.

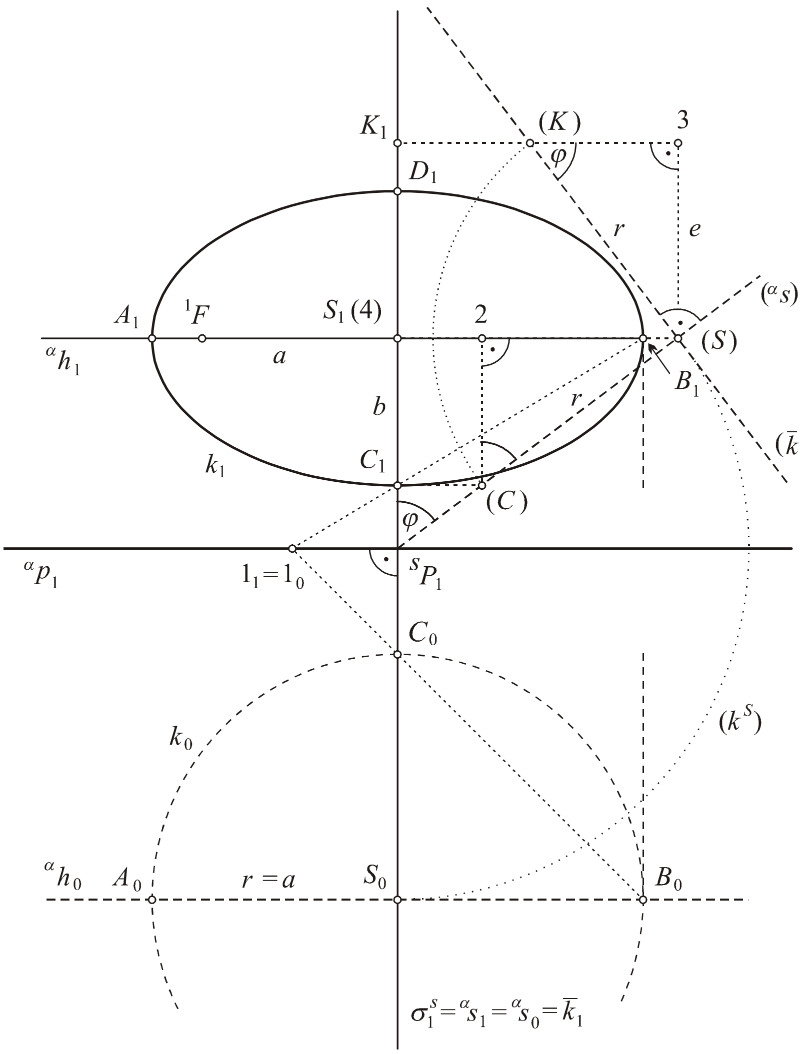
3. Nemá zmysel určovať viditeľnú polpriamku priamky a vzhľadom na rovinu α (úsečka priamky a zobrazená na dostupnej časti nákresne je viditeľná celá). (Odôvodnite.) Pre priamku $a' = \overleftrightarrow{A'B'}$ platí: $a' \cap \alpha = a' \cap s^{\alpha} = B' \wedge z^{A'} < z^{B'}$, odkiaľ vyplýva viditeľnosť tej polpriamky priamky a' so začiatkom v bode B', ktorá je opačná k polpriamke $\mapsto B'A'$.

Úloha 5.5

Zobrazte kružnicu $k = (S;\, r)$ ležiacu v danej rovine $\alpha = \overleftrightarrow{p^{\alpha}S}$. (Rovina α má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetňu, jej stopa je určená obrazom p_1^{α}, bod S je určený okótovaným priemetom, $z^S = 4j$, $|\,r\,| = 3{,}5j$.) [37]

Riešenie úlohy

1. Metódou riešenia úlohy je otočenie roviny kružnice do priemetne alebo do roviny s priemetňou rovnobežnej. Pretože $z^S = 4j$, zvolíme si otočenie roviny α do priemetne. Podľa vety 5.1 existuje pravouhlá perspektívna afinita f: $(\alpha_1) \to (\alpha_0)$. Osou tejto afinity je obraz stopy danej roviny a dvojicu bodov vzor – obraz tvorí pravouhlý priemet S_1 bodu S a otočená poloha bodu S (označenie S_0). Konštrukcia otočenej polohy bodu S je opísaná v paragrafe 5.1.



[37] Čo je premietacím útvarom kružnice v pravouhlom premietaní do zvolenej priemetne? (Uvažujte o vzájomnej polohe roviny kružnice s priemetňou.) Použite v dôkaze vety 5.4.

Rovina otáčania bodu S má na obrázku 31 označenie σ^S, kružnica k^S otáčania bodu S má stred v stopníku spádovej priamky roviny α v rovine σ^S a polomer $r^S \cong SP^s$ otočenia bodu S zostrojíme pomocou sklopenia roviny σ^S do priemetne.

2. Hlavné smery perspektívnej afinity f tvorí osnova priemetov hlavných a spádových priamok roviny α. To znamená, že útvar $k_1 = f^{-1}(k_0)$ je elipsa, ktorej hlavná os A_1B_1 leží na priemete hlavnej a vedľajšia os C_1D_1 na priemete spádovej priamky roviny α ($s^\alpha \subset \sigma^S$). Odtiaľ vyplýva: $A_1B_1 \cong A_0B_0 \cong AB$, t. j. $|A_1B_1| = 2.|r|$ a $|C_1D_1| = 2.|r| \cos|\varphi|$, kde $|\varphi|$ je odchýlka roviny α[38] (φ je uhol zhodný s uhlom roviny α s priemetňou).

3. Obraz bodu C možno zostrojiť i bez otočenia roviny α, pretože platí: $C \in s^\alpha$, $CS \cong r$; túto konštrukciu možno urobiť pomocou sklopenia roviny σ^S.[39]

4. Zostrojme ešte priamku $\bar{k}$ prechádzajúcu stredom S kružnice a kolmú na jej rovinu ($S \in \bar{k} \wedge \bar{k} \perp \alpha$) a jeden z bodov priamky $\bar{k}$, ktorého vzdialenosť od bodu S sa rovná polomeru kružnice ($K \in \bar{k} \wedge SK \cong r$). Vyjadrime dĺžku úsečky S_1K_1 pomocou pravouhlého trojuholníka $(S)(K)3$, v ktorom odvesna $(S)3$ je zhodná a rovnobežná s úsečkou S_1K_1. Trojuholníky $(S)(C)2$ a $(S)(K)3$ sú navzájom zhodné (usu) (dvojice odpovedajúcich si strán sú navzájom kolmé a $SC \cong SK$), t. j. $\angle(S)(K)3 \cong \angle(S)(C)2 \cong \varphi$, odkiaľ vyplýva: $|S_1K_1| = |(S)3| = |r| . \sin|\varphi|$. Dokážeme, ako súvisí dĺžka $|r| . \sin|\varphi|$ úsečky S_1K_1 s elipsou k_1.

Dĺžka hlavnej osi elipsy k_1 sa rovná $2.|r|$, dĺžka vedľajšej osi C_1D_1 sa rovná $2.|r| . \cos|\varphi|$. Vypočítajme lineárnu excentricitu e tejto elipsy. Platí: $e^2 = |r|^2 - |r|^2 . \cos^2|\varphi| = |r|^2 . \sin^2|\varphi|$ ([4]). Teda: $e = r . \sin|\varphi| = |S_1K_1|$.

Zhrnutím vlastností kolmého priemetu kružnice do roviny je nasledujúca veta:

Veta 5.4

a) Pravouhlým priemetom kružnice k ($k \subset \alpha$, $\alpha \# \pi$, $\alpha \not\perp \pi$) s polomerom r (do roviny π) je elipsa, ktorej hlavná os leží na priemete hlavnej priamky roviny α a je zhodná s priemerom kružnice. Vedľajšia os má dĺžku $2.|r| . \cos|\varphi|$, kde φ je uhol zhodný s uhlom roviny kružnice s priemetňou a lineárna excentricita elipsy k_1 sa rovná dĺžke priemetu úsečky zhodnej s polomerom kružnice a kolmej na rovinu kružnice.[40]

b) Pravouhým priemetom kružnice v rovine kolmej na priemetňu je úsečka zhodná s priemerom kružnice a pravouhlým priemetom kružnice v rovine rovnobežnej s priemetňou je zhodná kružnica.

Poznámka 5.4

1. Dosiaľ prebrané polohové a metrické úlohy umožňujú riešiť v tejto zobrazovacej metóde ľubovoľnú stereometrickú úlohu.[41] Ide najmä o zobrazenie základných telies, ktoré majú isté požadované vlastnosti, konštrukcie prienikov telies s priamkami a rovinami, konštrukcie oporných, resp. dotykových rovín (určitých požadovaných vlastností) hranatých telies, resp. oblých telies, konštrukcie rovnobežného osvetlenia základných telies a pod. Úlohy súvisiace s osvetlením bude možné riešiť až po vysvetlení princípu osvetlenia

---

[38] AB, resp. CD je priemer kružnice k ležiaci na hlavnej, resp. spádovej priamke roviny α. Posledná rovnosť vyplýva z pravouhlého trojuholníka $(S)(C)2$, kde úsečka $(C)2$ je zhodná a rovnobežná s úsečkou S_1C_1 a uhol pri vrchole (C) je zhodný s uhlom φ (zátvorky označujú sklopené polohy útvarov v sklopení roviny σ^S).

[39] Obraz kružnice v kótovanom zobrazení možno teda zostrojiť i bez otočenia roviny kružnice.

[40] Dôkaz tvrdenia a) vety bol urobený v priebehu riešenia úlohy 5.5. Dôkaz tvrdenia b) sa necháva čitateľovi.

[41] Samozrejmým predpokladom je ovládanie algoritmov riešenia stereometrických úloh. ([1])

a základných súvisiacich pojmov, čo presahuje rámec tohto textu. Základy rovnobežného i stredového osvetlenia a aplikáciu osvetlenia na základné telesá možno nájsť napr. v [3]. Zbierka typových riešených úloh sa bude postupne rozširovať i v rámci bakalárskych a magisterských prác.

2. V nasledujúcom texte ukážeme aplikáciu vety 5.4 na riešenie úlohy zdanlivo nesúvisiacej s obrazom kružnice, vyriešime dve typové úlohy o uhloch základných geometrických útvarov, úlohu o konštrukcii priamky danej roviny, ktorá má požadovaný spád a analogicky úlohu o konštrukcii roviny daného spádu, ktorá je incidentná s danou priamkou. Záverečná kapitola textu bude venovaná riešeným úlohám o konštrukcii obrazov telies požadovaných vlastností v metóde kótovaného zobrazenia a bude postupne dopĺňaná riešenými úlohami spomenutými v časti 1 poznámky 5.4.

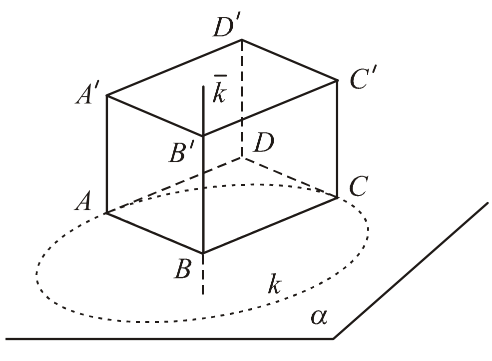
Úloha 5.6

Dané sú pravouhlé priemety A_1B_1, B_1C_1 susedných hrán kocky $ABCDA'B'C'D'$. Dourčite priemet kocky. (Zvoľte si body A_1, B_1, C_1 ľubovoľne tak, aby boli nekolineárne a uhol $A_1B_1C_1$ nebol pravý.) (Obr. 33)

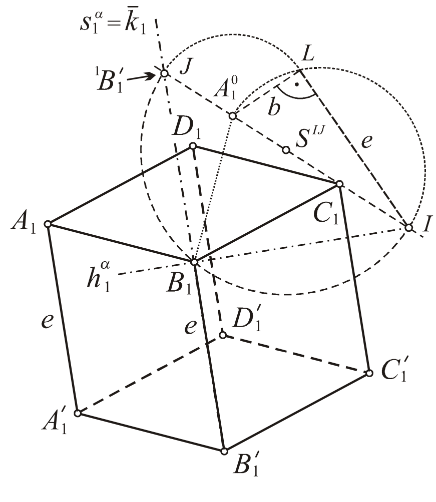
Riešenie úlohy

1. Priemetom steny $ABCD$ kocky je rovnobežník $A_1B_1C_1D_1$ s jeho vnútrom.

2. Pre susedné hrany AB, BC kocky platí: $AB \perp BC \wedge AB \cong BC$, čo znamená, že úsečky AB, BC môžeme považovať za kolmé polpriemery kružnice k roviny $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ so stredom v bode B a polomerom $r \cong AB$. (Obr. 32) Úsečky A_1B_1, B_1C_1 sú preto združenými polpriemermi elipsy k_1. Hlavná os elipsy k_1 leží na priemete hlavnej priamky roviny α prechádzajúcej bodom B a je zhodná s priemerom kružnice k. Možno ju zostrojiť napr. pomocou Rytzovej konštrukcie ([4]). Vedľajšia os elipsy k_1 leží na priemete spádovej priamky s^α roviny α (prechádzajúcej bodom B); priemet s_1^α tejto spádovej priamky je incidentný s priemetom priamky $\bar{k}$ kolmej na rovinu α, t. j. $\bar{k}_1 \perp h_1^\alpha$ (obr. 33). Nech priamka $\bar{k}$ prechádza bodom B; potom táto priamka obsahuje hranu BB' danej kocky (obr. 32). Dĺžka úsečky B_1B_1' sa podľa vety 5.4 rovná lineárnej excentricite e elipsy k_1. (Obr. 33) [42]



Obr. 32



Obr. 33

[42] Rytzova konštrukcia osí elipsy z jej združených priemerov a konštrukcia dĺžky hlavnej a vedľajšej osi elipsy (t. j. i lineárnej excentricity e tejto elipsy) je vysvetlená v [4].

3. *Úloha má dve riešenia* – vrchol B' možno zostrojiť na oboch polpriamkach priamky $\bar{k}$ so začiatkom B. Na obrázku 33 sú označené priemety oboch bodov: B', ${}^1B'$ a zobrazené je riešenie s vrcholom B'. Pre žiadne z riešení úlohy nie je možné bez doplňujúcich údajov doriešiť otázku viditeľnosti.

Nech napr. platí: $z^B > z^A$ (hlavná priamka h^α prechádzajúca bodom B má väčšiu kótu než hlavná priamka roviny α prechádzajúca bodom A). Odtiaľ vyplýva: $z^B > z^{B'}$ (veta 3.2) a analogicky $z^A > z^{A'}$, atď., čo znamená, že stena $ABCD$ je viditeľná celá a zo steny $A'B'C'D'$ sú viditeľné len hrany patriace obrysu telesa (vzhľadom na kolmé premietanie do roviny π); sú to hrany $A'B'$ a $B'C'$. Týmto faktom je určená aj viditeľnosť hrán telesa, ktoré sú rovnobežné s hranou BB': neviditeľná je len hrana DD', pretože bod D' nie je viditeľný, ako spoločný bod neviditeľných hrán telesa. Priemety úsečiek AA', CC', DD' dourčíme na základe faktu, že ide o úsečky súhlasne rovnobežné a zhodné s úsečkou BB'. Ide o invariantné vlastnosti rovnobežného (špeciálne pravouhlého premietania), odkiaľ vyplýva pre pravouhlé priemety: $A_1A_1' \uparrow\uparrow B_1B_1' \uparrow\uparrow C_1C_1' \uparrow\uparrow D_1D_1'$, $A_1A_1' \cong B_1B_1' \cong C_1C_1' \cong D_1D_1'$.

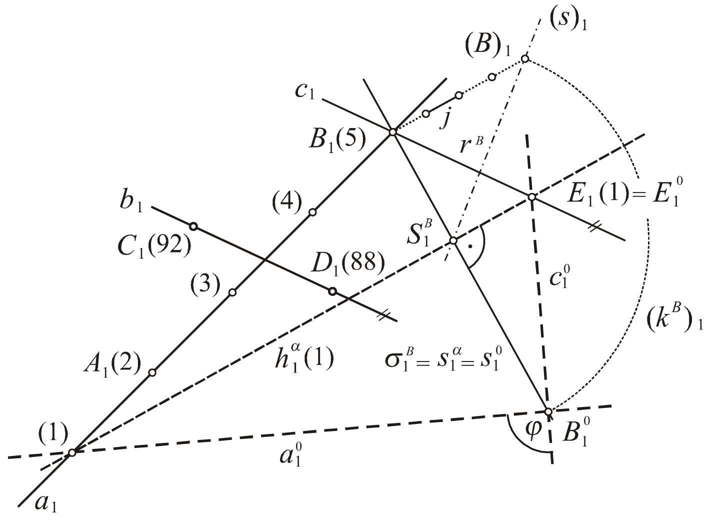
Úloha 5.7

Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok a, b.
($a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$; všetky body sú dané okótovanými priemetmi)

Riešenie úlohy

1. Priamky a, b sú navzájom mimobežné (obr. 34). (Odôvodnite prečo.) Podľa definície uhla dvoch priamok ([1], definícia 4.1) je potrebné zostrojiť uhol ľubovoľných dvoch rôznobežných priamok, z ktorých každá je rovnobežná práve s jednou z priamok a, b.

2. K tomu stačí ľubovoľným bodom jednej z daných priamok, napr. bodom B priamky a, zostrojiť priamku c rovnobežnú s priamkou b. Potom platí: $\angle ab \cong \angle ac$. Priamku c zostrojíme podľa úlohy 4.1; na obrázku 34 je táto priamka dourčená bodom E s kótou $z^E = 1j$ ($|C_1D_1| = 4i_b = 4i_c = |B_1E_1| \wedge C_1D_1 \uparrow\uparrow B_1E_1$).



Obr. 34

3. Uhol zhodný s uhlom priamok a, c zotrojíme v otočení roviny $\alpha = \overleftrightarrow{ac}$ do priemetne alebo do úrovne. V riešení sme použili otočenie roviny α do úrovne π' ($z^{\pi'} = j$). Potom stačí zostrojiť pravouhlý priemet otočenej polohy bodu B a použiť samodružné body priamok a_1, c_1 v pravouhlej perspektívnej afinite f otáčania roviny α (f: $(\alpha_1) \to (\alpha_1^0)$), afinita f je určená osou

h_1^α ($z^h = j$) a dvojicou bodov B_1, B_1^0 .) Rovina otáčania bodu B je označená σ^B ($B \in \sigma^B \wedge \sigma^B \perp h^\alpha$), polomer r^B otočenia bodu B je zostrojený pomocou sklopenia roviny σ^B do úrovne π' ($r^B \cong S^B B$; priamka $s = \overleftrightarrow{S^B B}$ je spádová priamka roviny α v rovine σ^B) a k^B je kružnica otočenia bodu B.

4. *Záver.* $\varphi = \angle ab \cong \angle ac \cong \angle a_1^0 c_1^0$

Úloha 5.8

Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamky m s rovinou α. (Priamka m je rovnobežná s priemetňou: $m = (m_1, ?)$; rovina α je určená spádovou priamkou $s = \overleftrightarrow{AB}$, body A, B sú dané okótovanými priemetmi.)

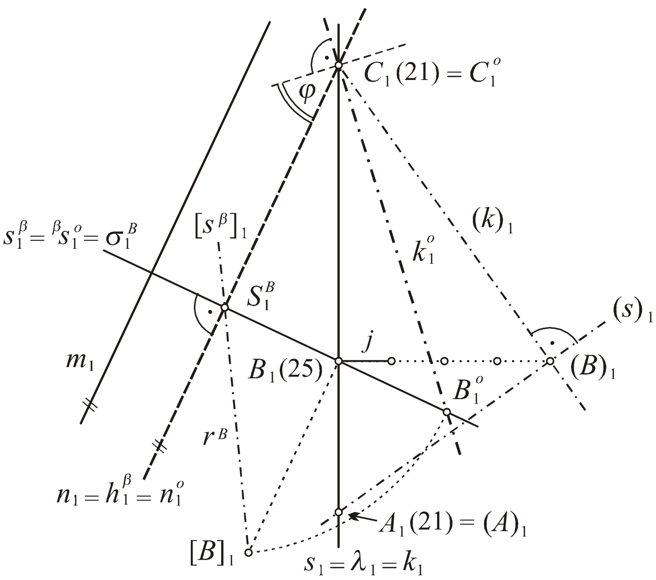
Riešenie úlohy

1. Platí: uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na danú rovinu ([1], veta 4.5); takáto konštrukcia je v mnohých prípadoch oveľa efektívnejšia než konštrukcia na základe definície 4.4 z [1] .

2. Zostrojme teda priamku k, ktorá prechádza napr. bodom B a je kolmá na rovinu α (k; $B \in k \wedge k \perp \alpha$ – úloha 5.3). Platí: $s_1 = k_1$; priamku k dourčíme pomocou sklopenia spoločnej premietacej roviny λ priamok s, k do úrovne π' ($z^{\pi'} = 21j$), a to bodom C v tejto úrovni ($z^C = 21j$) (pravouhlé priemety sklopených polôh priamok s, k sú navzájom kolmé). (Obr. 35)

3. Uhol zhodný s uhlom priamok m, k zostrojíme podľa predchádzajúcej úlohy ako uhol zhodný napr. s uhlom priamok n, k ($C \in n \wedge n \parallel m$). Otočenie roviny $\beta = \overleftrightarrow{kn}$ je jednoduchšie než v úlohe 5.7, pretože priamka n je rovnobežná s priemetňou. Ide o hlavnú priamku roviny β v úrovni π'; preto výhodne použijeme otočenie tejto roviny do úrovne π'. Stačí zostrojiť pravouhlý priemet otočenej polohy bodu B. [43]

4. *Záver*: $\varphi = \angle m\alpha \cong \angle n\alpha \cong R - \angle nk \cong R - \angle n_1^0 k_1^0$ (R je označenie pravého uhla)



Obr. 35

[43] Konštrukcia sa nebude komentovať. Použijeme bežné označenie – spádová priamka roviny β prechádzajúca bodom B má označenie s^β. Pozor na odlišné označenie sklopených polôh útvarov v sklopení premietacej roviny λ spádovej priamky $s \subset \alpha$ a v sklopení premietacej roviny σ^B spádovej priamky $s^\beta \subset \beta$ (napr. pre bod B je (B) označenie jeho sklopenej polohy v sklápaní roviny λ a $[B]$ je sklopená poloha toho istého bodu v sklopení roviny otáčania σ^B (do tej istej úrovne π')).

Poznámka 5.5

a) Analogicky s riešením predchádzajúcej úlohy možno zostrojiť uhol zhodný s uhlom rovín α, β ako uhol zhodný s uhlom priamok a, b ($a \perp \alpha$, $b \perp \beta$).

b) Obe predchádzajúce úlohy riešte pri rozličných zadaniach a polohách priamok a rovín vzhľadom na priemetňu. Rozhodnite, či a kedy môže platiť: **1.** $\angle m, \alpha \cong \angle m, s^{\alpha}$, **2.** $\angle \alpha, \beta \cong \angle s^{\alpha}, s^{\beta}$, **3.** $\angle \alpha, \beta \cong \angle p^{\alpha}, p^{\beta}$. Dostatočný počet predrysovaných zadaní možno nájsť v kapitole 7 tohto textu.

Úloha 5.9

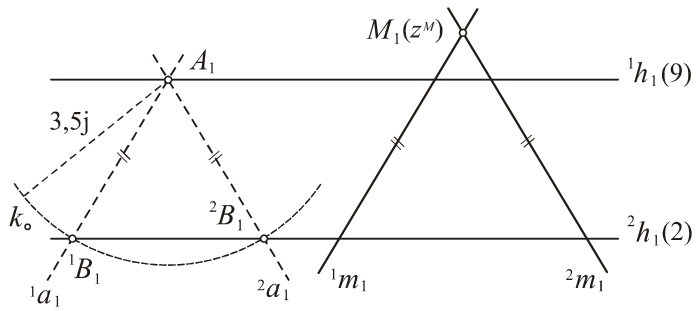
Zostrojte priamku danej roviny α, ktorá prechádza bodom M tejto roviny tak, aby jej spád sa rovnal danému reálnemu číslu ${}^1s$ (${}^1s > 0$, ${}^1s \in$ R). (Rovina α je určená obrazmi hlavných priamok ${}^ih$ s kótami ${}^iz$ (i = 1, 2) a bod M je určený pravouhlým priemetom M_1.)

Riešenie úlohy

1. Ak existuje priamka m požadovaných vlastností, tak pretína hlavné priamky ${}^ih$ (i = 1, 2) v bodoch ${}^iM$ s kótou príslušnej hlavnej priamky. (Vysvetlite, prečo nie je priamka m hlavnou priamkou roviny α.) Pre dĺžku priemetu úsečky ${}^1M\,{}^2M$ platí: $|{}^1M_1\,{}^2M_1| = |{}^1z - {}^2z|.\ i_m$ (i_m je interval priamky m, t. j. $i_m = 1/\ {}^1s$ (definícia 2.1)). To znamená, že priemet priamky m (priamka m_1) je priečkou priamok ${}^1h_1$, ${}^2h_1$, pričom úsečka vyťatá na priečke oboma priamkami ${}^ih_1$ má požadovanú dĺžku $|{}^1z - {}^2z|.\ i_m$.

2. Zostrojme najprv priečku a_1 piamok ${}^1h_1$, ${}^2h_1$ požadovanej vlastnosti tak, aby prechádzala ľubovoľným bodom A_1 jednej z nich (napr. $A_1 \in {}^1h_1 \wedge A \in {}^1h$). Pre bod $B_1 \in {}^2h_1$ ($B \in {}^2h$) priečky a_1 potom platí, že je bodom kružnice k_o priemetne so stredom v bode A_1 a polomerom rovnajúcim sa $|{}^1z - {}^2z|.\ i_m$. Priamka $a = \overleftrightarrow{AB}$ má požadovaný spád ${}^1s$. (Obr. 36)

3. Na záver stačí zostrojiť bodom M priamku m rovnobežnú s primkou a.



Obr. 36

4. *Riešiteľnosť*. Počet riešení úlohy závisí od počtu priesečníkov kružnice k_o s priamkou ${}^2h_1$. Preto ak:

a) $|{}^1z - {}^2z|.\ i_m > |{}^1h_1\ {}^2h_1| = |{}^1z - {}^2z|.\ i_\alpha$ (i_α – interval roviny α), tak existujú dve priamky ${}^1a$, ${}^2a$ roviny α, ktoré prechádzajú bodom A a majú spád rovnajúci sa reálnemu číslu ${}^1s$. Úloha má dve riešenia ${}^1m$, ${}^2m$ ($M \in {}^1m \cap {}^2m$, ${}^im \parallel {}^ia$). Úloha má teda dve riešenia práve v prípade, keď $i_m > i_\alpha$, t. j. keď je daný spád ${}^1s$ menší, než je spád s_α danej roviny α. To je v súlade s poznatkom, že spádová priamka roviny je priamka s najväčším spádom spomedzi priamok tejto roviny.

b) Analogicky v prípade $i_m = i_\alpha$ je priamka m spádovou priamkou roviny, teda úloha má práve jedno riešenie.

c) V prípade $i_m < i_\alpha$ riešenie neexistuje.

Vo zvolenom prípade platí: $|{}^1h_1\,{}^2h_1| = 3j$, ${}^1z = 9j$, ${}^2z = 2j$ a ${}^1s = 2$. Polomer kružnice k_o má dĺžku $|9 - 2|\,j \,.\, 1/2 = 3{,}5j$. To znamená, že úloha má dve riešenia ${}^1m$, ${}^2m$. Každá z priamok je určená priesečníkmi s príslušnými hlavnými priamkami (s celočíselnými kótami). Kótu bodu M roviny α – z hľadiska riešenia úlohy – netreba zisťovať.

Úloha 5.10

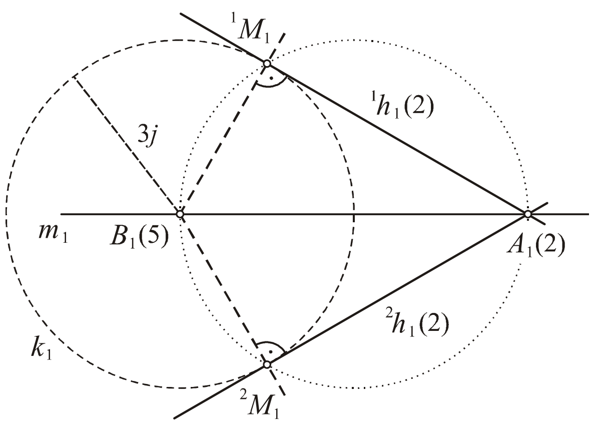
Zostrojte rovinu α, ktorá prechádza danou priamkou m a má spád rovnajúci sa reálnemu číslu ${}^1s$ (${}^1s > 0$). (Priamka $m = \overleftrightarrow{AB}$ je určená okótovanými priemetmi bodov A, B.)

Riešenie úlohy

1. Ak rovina α požadovaných vlastností existuje, tak pre priesečník M hlavnej priamky h^A tejto roviny (prechádzajúcej bodom A) a spádovej priamky s^B tejto roviny (prechádzajúcej bodom B) platí: $z^M = z^A$, $|B_1M_1| = i_\alpha \,.\, z^A - z^B|$ ($i_\alpha = 1/{}^1s$) (definícia 3.2) a $h_1^A \perp s_1^B$ (t. j. $\angle A_1M_1B_1 \cong R$); odtiaľ vyplýva, že h_1^A je dotyčnicou kružnice k_1 priemetne so stredom v bode B_1 a polomerom, ktorého dĺžka sa rovná $i_\alpha \,.\, |z^A - z^B|$.

2. *Riešiteľnosť úlohy*. Počet riešení úlohy závisí od počtu dotyčníc prechádzajúcich bodom A_1 a dotýkajúcich sa kružnice k_1 (B_1; $i_\alpha \,.\, |z^A - z^B|$) ($i_\alpha$ je interval konštruovanej roviny, t. j. spádovej priamky tejto roviny), čo závisí od vzájomnej polohy bodu A_1 a kružnice k_1. Pre bod A_1 nastane práve jedna z možností: bod A_1 je vonkajším bodom kružnice k_1 alebo leží na tejto kružnici alebo je jej vnútorným bodom.

a) Ak je bod A_1 vonkajším bodom kružnice k_1, úloha má dve riešenia; existujú dve dotyčnice prechádzajúce bodom A_1 ku kružnici k_1 (sú to priemety hlavných priamok dvoch navzájom rôznych rovín ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ (${}^ih \subset {}^i\alpha$, $i = 1, 2$) požadovanej vlastnosti.)[44] To nastane práve vtedy, keď platí: $i_\alpha \,.\, |z^A - z^B| < |A_1B_1| = i_m \,.\, |z^A - z^B|$, t. j. keď $i_\alpha < i_m$ a následne keď je spád s_m priamky m menší, než je predpísaný spád ${}^1s = s_\alpha$ konštruovanej roviny α.



Obr. 37

[44] Je zrejmé, že roviny ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ sú dotykovými rovinami rotačnej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$ (B – vrchol, $k \subset \pi'$ ($z^{\pi'} = z^A$) – určujúca kružnica), ktoré prechádzajú bodom A roviny π'.

b) Ak $A_1 \in k_1$, t. j. $i_\alpha = i_m$, je priamka m spádovou priamkou roviny α požadovanej vlastnosti. Jediným riešením úlohy je rovina určená spádovou priamkou m.

c) Ak je bod A vnútorným bodom kružnice k_1, t. j. $i_\alpha > i_m \Leftrightarrow s_\alpha = {}^1s < s_m$, tak rovina požadovanej vlastnosti neexistuje (spádová priamka roviny je priamkou najväčšieho spádu spomedzi všetkých priamok roviny).

Vo zvolenom prípade platí: $z^A = 2j$, $z^B = 5j$, $|A_1B_1| = 6j$ a ${}^1s = s_\alpha = 1$ (obr. 37). Dĺžka polomeru kružnice k_1 sa rovná $|z^A - z^B| \cdot 1 = 3j$ a spád priamky m sa rovná $|z^A - z^B| / |A_1B_1| = 1/2$. Riešením úlohy sú dve roviny ${}^i\alpha = \overleftrightarrow{{}^ihB}$ (i = 1, 2), kde ${}^ih \subset {}^i\alpha$ je hlavná priamka roviny s kótou $2j$. Na obrázku sú narysované i spádové priamky oboch rovín prechádzajúce bodom B (bod B je určený okótovaným priemetom).

6. Konštrukcia obrazov základných telies v kótovanom zobrazení a aplikačné úlohy

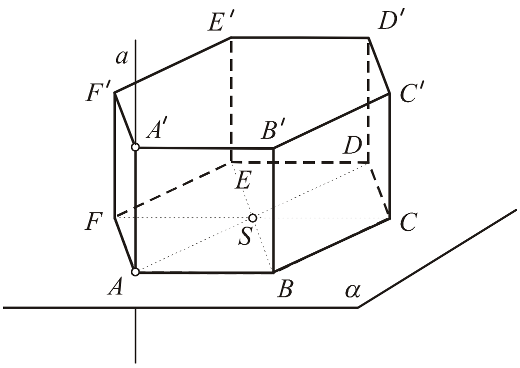
Úloha 6.1

Zobrazte pravidelný šesťboký hranol určený stredom S podstavy $ABCDEF$ v rovine α a vrcholom A' druhej podstavy. [α = (7j; 8j; 6j), S(0; 4j; 3j), A'(4j; 5j; 4j)] [45]

Stereometrické riešenie úlohy (obr. 38)

Bočné hrany pravidelného hranola s podstavou $ABCDEF$ v rovine α sú kolmé na rovinu α – pri obvyklom označení vrcholov bočných hrán je vrchol A podstavy telesa v rovine α kolmým priemetom daného vrcholu A' do tejto roviny. Ak hranol požadovaných vlastností existuje, algoritmus riešenia úlohy bude pozostávať z nasledujúcich krokov:

1. Konštrukcia priamky a ($A' \in a \wedge a \perp \alpha$);
2. Konštrukcia priesečníka priamky a s rovinou α ($a \cap \alpha = A$);
3. Konštrukcia pravidelného šesťuholníka v rovine α, ktorý je daný stredom S a jedným vrcholom A;
4. Konštrukcia zvyšných bočných hrán telesa, ktoré sú zhodnými a navzájom súhlasne rovnobežnými úsečkami ($AA' \cong BB' \cong CC' \cong ... \cong FF' \wedge AA' \uparrow\uparrow BB' \uparrow\uparrow CC' \uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow FF'$);
5. Určenie viditeľnej podstavy (vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne π).



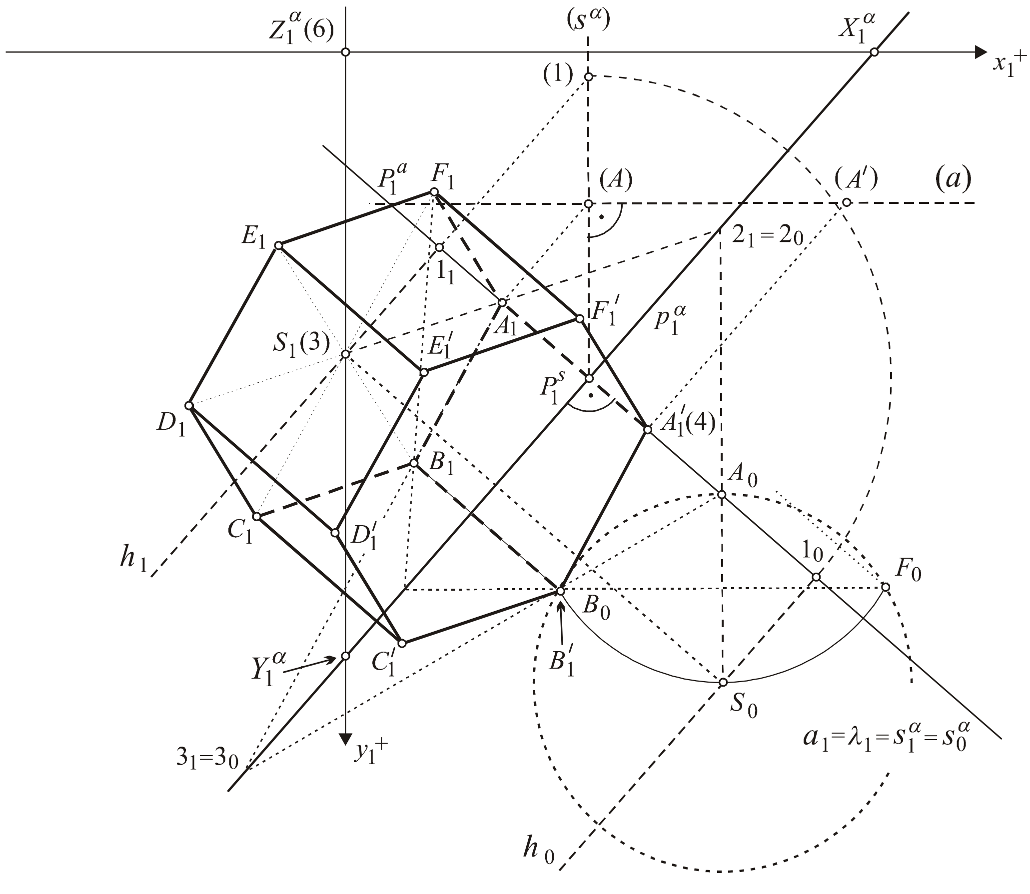
Obr. 38

[45] Rovinu α vo všeobecnej polohe zadávame niekedy pomocou trojice jej bodov X^α, Y^α, Z^α na osiach ortonormálnej sústavy súradníc. Symbol α = (7j, 8j, 6j) znamená, že body spomenutej trojice majú súradnice: X^α(7j, 0, 0), Y^α(0, 8j, 0), Z^α(0, 0, 6j), kde j je ľubovoľná, no pevne zvolená jednotka dĺžky v danej úlohe.

Riešenie úlohy v nákresni (obr. 39)

1. Konštrukcia priamky *a* ($A' \in a \wedge a \perp \alpha$). Rovina α má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetňu, preto kolmý priemet priamky a do priemetne π je kolmý na priemety hlavných priamok roviny, t. j. platí: $A_1' \in a_1 \wedge a_1 \perp p_1^\alpha$. Priamku a dourčíme pomocou spádovej priamky s^α roviny, ktorá leží s priamkou a v spoločnej premietacej rovine λ ($a \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi$), a to pomocou sklopenia tejto roviny do priemetne.[46] Spádová priamka roviny je určená stopníkom P^s a napríklad bodom 1, ktorý leží so stredom S na tej istej hlavnej priamke h, teda jeho kóta sa rovná $3j$ (j je zvolená jednotka dĺžky[47]). Pomocou tejto hlavnej priamky dourčíme i bod S_1 – bod S je stredom úsečky $Y^\alpha Z^\alpha$ (vysvetlite prečo). Priamka a je kolmá na všetky priamky roviny α, teda i na spádovú priamku s^α; táto kolmosť sa objaví v sklopení roviny λ ($(A') \in (a) \wedge (a) \perp (s^\alpha)$). Priamka a je určená bodom A' a napríklad stopníkom P^a.

2. Konštrukcia bodu *A* ($A = a \cap \alpha$). Pre priesečník A platí (stereometria): $A = a \cap \alpha = (a \cap \lambda) \cap \alpha = a \cap (\lambda \cap \alpha) = a \cap s^\alpha$, teda sklopenú polohu bodu A môžeme zostrojiť na základe konštrukcie v bode 1 algoritmu riešenia úlohy. Bod A je určený pravouhlým priemetom A_1 a kótou z^A ($z^A = |(A)A_1|$).



Obr. 39

3. Konštrukcia podstavy *ABCDEF* telesa. Pravidelný šesťuholník je určený stredom S a vrcholom A. Jeho obraz v kótovanom zobrazení zostrojíme pomocou otočenia roviny

[46] Platí: $a_1 = \lambda_1 = s_1^\alpha$

[47] Na obrázku 39 je zvolená dĺžka jednotkovej úsečky $| j |$ = 1cm.

šesťuholníka do priemetne. Platí: Medzi pravouhlými priemetmi bodov roviny α a otočenými polohami týchto bodov (v otočení roviny do priemetne) je vzťah pravouhlej perspektívnej afinity f (f: $(\alpha_1) \to (\alpha_0)$), ktorej osou je obraz p_1^α stopy roviny; usporiadanú dvojicu bodov vzor – obraz tvoria napríklad body 1_1 a 1_0, kde bod 1_0 je otočenou polohou bodu 1 do roviny π.[48] Rovina otáčania bodu 1 je rovina λ, stred otáčania je stopník P^s spádovej priamky s^α a polomer otočenia bodu 1 je zhodný s úsečkou P^s1; polomer otáčania určíme v sklopení roviny λ ($r^1 \cong P_1^s(1)$). (Na obrázku je zobrazená sklopená poloha časti kružnice otáčania bodu 1.) Konštrukcia otočenej polohy 1_0 bodu 1 je zrejmá. Otočené polohy bodov S, A zostrojíme na základe afinity f (f: $S_1, A_1 \mapsto S_0, A_0$). V otočení je zobrazená kružnica opísaná šesťuholníku $A_0B_0 \ldots F_0$, pomocou ktorej možno pravidelný šesťuholník zostrojiť. Pretože pravidelný šesťuholník je stredovo súmerný a táto vlastnosť je invariantnou vlastnosťou rovnobežného premietania, stačí zostrojiť ešte dva vrcholy (z ktorých žiadne dva nie sú protiľahlými vrcholmi šesťuholníka; na obrázku 39 sú to body B_0, F_0).[49] Následne zostrojíme pravouhlé priemety týchto bodov (f^{-1}: $B_0, F_0 \mapsto B_1, F_1$) a zvyšné vrcholy $((A_1D_1S_1) = (B_1E_1S_1) = (C_1F_1S_1) = -1)$. Obraz podstavy $ABCDEF$ telesa je určený.

4. Konštrukcia bočných hrán telesa. Na základe stereometrického riešenia úlohy platí: $A_1A_1' \cong B_1B_1' \cong \ldots F_1F_1' \wedge A_1A_1' \uparrow\uparrow B_1B_1' \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow F_1F_1'$. Obrazy všetkých vrcholov a hrán telesa v kótovanom zobrazení sú určené.

5. Určenie viditeľnosti podstáv telesa (a následne všetkých bočných hrán). Pretože roviny podstáv sú navzájom rovnobežné, stačí zistiť viditeľnosť ľubovoľného bodu jednej z rovín vzhľadom na druhú rovinu. Navyše bočné hrany telesa sú na tieto roviny kolmé, teda viditeľnosť napr. jednej z polpriamok priamky a (so začiatkom A) vzhľadom na rovinu α overíme *porovnaním kót* bodov A' a bodu A.[50] Platí: $z^{A'} > z^{A}$, t. j. polpriamka $\mapsto AA'$ je viditeľnou polpriamkou vzhľadom na rovinu α a následne je viditeľná podstava telesa, ktorej jeden vrchol je bod A'. Okrem podstavy telesa $A'B'C'D'E'F'$ sú viditeľné všetky hrany telesa, ktoré patria jeho *obrysu* v danom kolmom premietaní do roviny π (priemety týchto hrán tvoria *hranicu priemetu telesa*). Sú to hrany CD, DE, EF podstavy v rovine α a bočné hrany telesa prechádzajúce vrcholmi C, F. Zvyšné bočné hrany telesa sú viditeľné práve vtedy, ak sú viditeľné oba krajné body hrán; odtiaľ vyplýva, že viditeľné sú ešte bočné hrany DD', EE' a hrany AA', BB' viditeľné nie sú. [51]

Celkom analogicky by sme určili viditeľnosť podstáv rotačného valca, a to porovnaním kót stredov jeho podstáv.

---

[48] Bod 1 je bodom spádovej priamky $\lambda \cap \alpha$ (roviny α) použitý v bode 1) algoritmu riešenia úlohy.

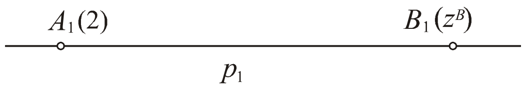
[49] Bod B_0 nie je na obrázku označený krúžkom, lebo v jeho tesnej blízkosti sa nachádza priemet vrcholu B' telesa. Navyše by stačilo zostrojiť len jeden z vrcholov B, F, pretože útvar $ABSF$ je kosoštvorec, t. j. jeho kolmým priemetom $A_1B_1S_1F_1$ je rovnobežník. (Odôvodnite!)

[50] Pozrite si v učebnom texte „*Metóda kótovaného zobrazenia*“ (kapitola 5 úloha 5.3) určovanie viditeľnosti polpriamky priamky kolmej na danú rovinu a porovnajte konštrukciu s určovaním viditeľnej polpriamky priamky s danou rovinou rôznobežnej, ale nie kolmej na túto rovinu. (Samozrejme, inou jednoduchou úvahou možno prísť k záveru, že kóta bodu roviny α ležiaceho s bodom A' na tej istej premietacej priamke je záporné číslo (odôvodnite); to však vyžaduje minimálne jeden znak navyše na obrázku a zápis v riešení úlohy, zatiaľ čo kóty bodov A, A' možno priamo určiť z konštrukcie v bode 2.)

[51] Analogicky pri určovaní viditeľnosti hrán *pravidelného ihlana*, resp. podstavy *rotačného kužeľa* zisťujeme viditeľnosť podstavy telesa porovnaním kót hlavného vrcholu V a stredu S podstavy. Podstava nie je viditeľná práve vtedy, keď je viditeľná polpriamka $\mapsto SV$ vzhľadom na rovinu podstavy (čo znamená viditeľnosť hlavného vrcholu). Hlavný vrchol telesa nemusí byť viditeľným vrcholom vzhľadom na rovinu podstavy, no môže byť viditeľným vrcholom vzhľadom na dané teleso – to nastane práve vtedy, keď hlavný vrchol je vrcholom obrysu ihlana, resp. v prípade kužeľa, keď premietacia priamka jeho vrcholu nemá s telesom už žiaden iný spoločný bod (t. j. priemet vrcholu kužeľa je vonkajším bodom priemetu podstavy).

7 Kótované zobrazenie (cvičenia)

1. Dané sú pravouhlé priemety bodov A, B priamky p a kóta bodu A (obr. 1). Dourčite bod B tak, aby: a) priamka p pretínala priemetňu π v bode tej svojej polpriamky so začiatkom v bode A, ktorá neprechádza bodom B; b) $p \parallel \pi$; c) priamka p pretínala priemetňu vo vnútornom bode úsečky AB; d) priamka p pretínala priemetňu π vo vnútornom bode tej svojej polpriamky π so začiatkom v bode B, ktorá neprechádza bodom A; e) $B = p \cap \pi$.



Obr. 1

2. Zobrazte pravidelný päťboký ihlan s podstavou $ABCDE$ v priemetni π a výškou v = 7j, ak je daný stred S podstavy a jeden vrchol A [S (3j; 3j; 0), A (–j; 3,5j; 0)].[52]

3. Zobrazte pravidelný šesťboký hranol s podstavou $ABCDEF$ v rovine π' (rovnobežnej s priemetňou π s kótou $z^{\pi'}$ = –20j) a výškou v = 15j, ak je daný stred S podstavy a jeden vrchol A [S(0j; 5j; –20j), A(2j; j; –20j)].

4. Daná je priamka $p = \overleftrightarrow{AB}$, okótovaný priemet bodu M ($M_1 \in p_1$) a pravouhlý priemet bodu N (obr. 2). Riešte úlohy: a) overte incidenciu bodu M a priamky p; b) určite kótu bodu N tak, aby ležal na priamke p; c) zobrazte bod L priamky p s kótou –5j (resp. $\sqrt{3}$ j, resp. (3/7)j); d) zobrazte bod K priamky p tak, aby $|KB|$ = 10j.

Obr. 2

5. Riešte predchádzajúcu úlohu pre nasledujúce hodnoty kót bodov: z^A = 125j, z^B = 121j, z^M = 124j, z^L = 120j.

6. Určite dĺžku úsečky AB, uhol priamky $p = \overleftrightarrow{AB}$ s priemetňou, stopník priamky p a interval priamky p (ak je to možné): a) priamka p nie je kolmá na priemetňu a z^A = 2j, z^B = –3j; b) priamka p nie je kolmá na priemetňu a z^A = 126j, z^B = 131j; c) priamka p je kolmá na priemetňu, kóty bodov A, B si zvoľte ľubovoľne. Vo všetkých prípadoch si body A_1, B_1 zvoľte ľubovoľne.

7. Ľubovoľný trojuholník $A_1B_1C_1$ v nákresni nech je priemetom trojuholníka ABC, pričom z^A = – j, z^B = 4j, z^C = 4j. Riešte úlohy: a) zobrazte ťažisko T trojuholníka a určite jeho kótu; b) určite dĺžky ťažníc trojuholníka; c) určite uhly priamok incidentných s ťažnicami trojuholníka s priemetňou; d) zostrojte stopníky strán trojuholníka.

8. Riešte predchádzajúcu úlohu (okrem bodu d)) pre z^A = 627, z^B = 631, z^C = 629.

9. Dané sú obrazy priamok AB, CD: $|A_1B_1|$ = 6j, $|C_1D_1|$ = 5j, z^A = 11j, z^B = 8j, z^C = 2j, z^D = 5j. Ktorá z priamok má väčší uhol s priemetňou? Určite graficky i výpočtom.

---

[52] Jednotku j dĺžky si vo všetkých úlohách, v ktorých nie je stanovená vopred, zvoľte ľubovoľne.

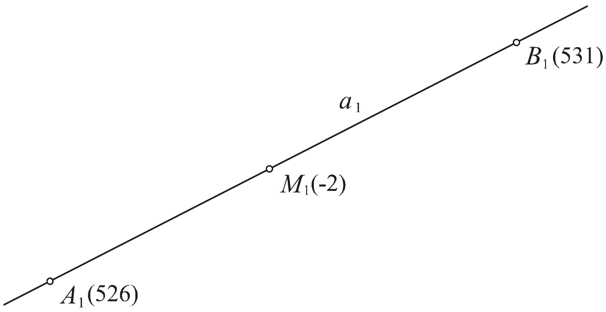
10. Zvoľte si priemet p_1 priamky p a priemet M_1 jej bodu M; nech $z^M = 7$j. Vystupňujte priamku p, ak má spád: a) ¾; b) 1; c) 5/2; d) 25% (pri pevne zvolenej jednotke dĺžky).

Poznámka: Spád priamky v percentách sa rovná číslu $\dfrac{|z^A - z^B|}{|AB|} \cdot 100$.

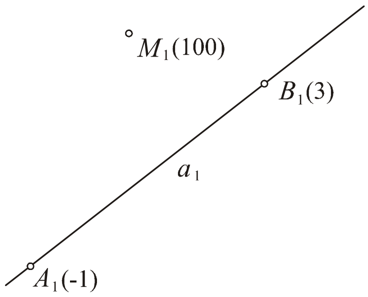
11. Čo je množina stopníkov všetkých priamok, ktoré prechádzajú daným bodom M ($z^M \neq 0$) a majú konštantný spád?

12. Priamky a, b ležia v tej istej premietacej rovine a pre body A, B ($A \in a$, $B \in b$) platí: $A_1 = B_1$, $z^A = 2$j, $z^B = -$ j. Interval priamky a sa rovná 2j, interval priamky b sa rovná (2/3)j. Zostrojte priesečník priamok a, b, ak majú a) súhlasne orientované stupnice; b) nesúhlasne orientované stupnice.

13. Zostrojte priamku m, ktorá prechádza daným bodom M a je rovnobežná s priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$. Všetky body sú dané okótovaným priemetmi. (Obr. 3 a, b)

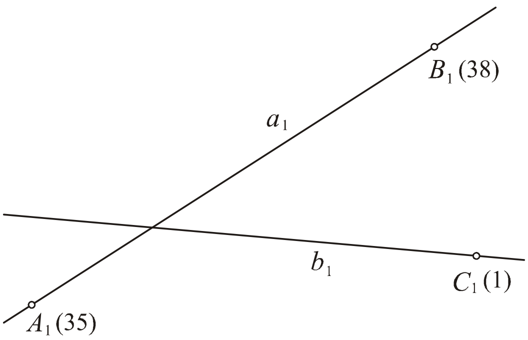


Obr. 3a

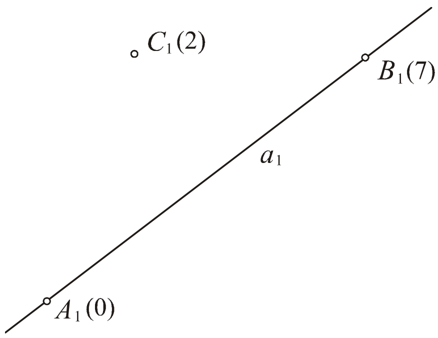


Obr. 3b

14. Dourčite priamku b tak, aby bola rôznobežná s priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$ a prechádzala bodom C (obr. 4).



Obr. 4

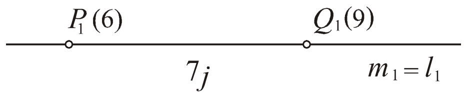


Obr. 5

15. Zostrojte priamku b prechádzajúcu bodom C, rovnobežnú s priemetňou a pretínajúcu priamku $a = \overleftrightarrow{AB}$. (Obr. 5)

16. Priemet trojuholníka ABC doplňte na priemet rovnobežníka $ABCD$ ($|A_1B_1| = 6$j, $|B_1C_1| = 4$j, $|C_1A_1| = 7$j, $z^A = 3$j, $z^B = 7$j, $z^C = 8$j). Zostrojte spojnice bodov priamok, ktoré prechádzajú stranami trojuholníka a majú rovnajúce sa kóty (napr. ${}^1z = 4$j, ${}^2z = 7$j). Aká je vzájomná poloha týchto spojníc? Odôvodnite!

17. Priamka m prechádza bodom P a jej spád sa rovná 5/3. Zobrazte priamku l, ktorá prechádza bodom Q, je kolmá na priamku m a leží s ňou v tej istej premietacej rovine. Dané sú okótované priemety bodov P, Q a dĺžka priemetu úsečky PQ. (Obr. 6)

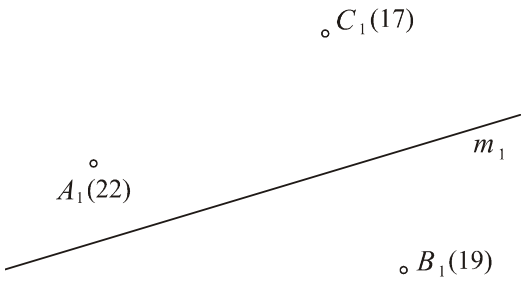


Obr. 6

18. Zobrazte kocku $ABCD\,A' \dots D'$, ktorej stena $ABCD$ leží v premietacej rovine. ($A = (A_1, 7\text{j})$, $B = (B_1, 5\text{j})$, $|A_1B_1| = 4$ j)

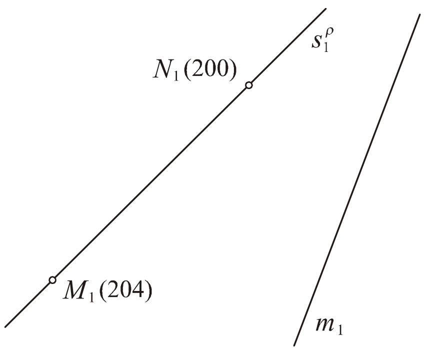
19. Zvoľte si ľubovoľný trojuholník $A_1B_1C_1$ v priemetni. Nech z^A = 22j, z^B = 19j a z^C = 17j. Zobrazte hlavnú priamku roviny ABC s kótou 19j, spádovú priamku tejto roviny incidentnú s bodom A a určite uhol roviny s priemetňou.

20. V rovine ABC z predchádzajúcej úlohy dourčite priamku m a zostrojte úsečku, ktorá je intervalom tejto priamky. (Obr. 7)

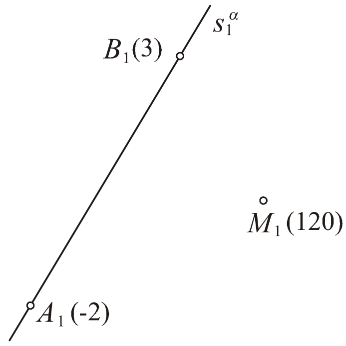


Obr. 7

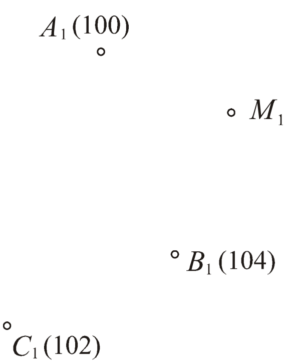
21. Rovina ρ je daná obrazom svojej spádovej priamky $s^\rho = \overleftrightarrow{MN}$. Dourčite priamku m s danou rovinou incidentnú. (Obr. 8)



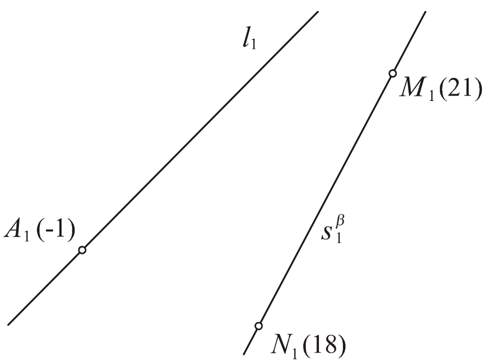
Obr. 8



Obr. 9a



Obr. 9b

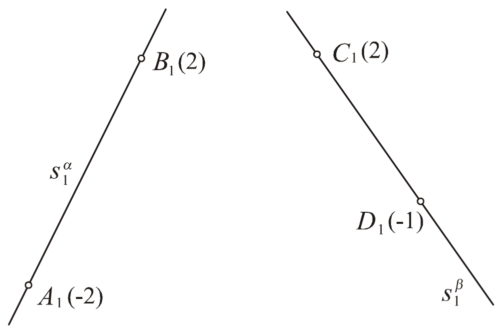


Obr. 10

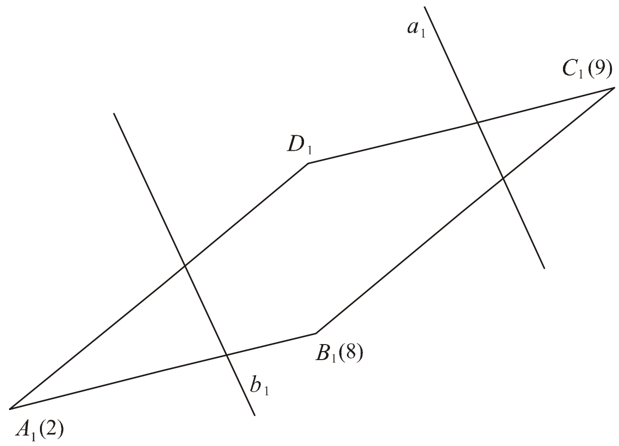
22. Zobrazte rovinu α', ktorá prechádza bodom M a je rovnobežná s rovinou α. Rovina α je určená: a) obrazom spádovej priamky $s^\alpha = \overleftrightarrow{AB}$; b) tromi bodmi A, B, C. (Obr. 9 a, b)

23. Dourčte priamku l ($A \in l$, $l \parallel \beta$) ak rovina β je určená obrazom svojej spádovej priamky $s^\beta = \overleftrightarrow{MN}$. (Obr. 10)

24. Zostrojte priesečnicu rovín α a β, ak sú obe roviny určené obrazmi spádových priamok ($s^\alpha = \overleftrightarrow{AB}$, $s^\beta = \overleftrightarrow{CD}$). (Obr. 11)



Obr. 11



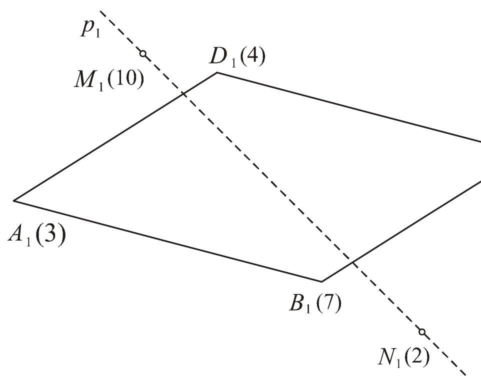
Obr. 12

25. Zostrojte prienik rovinných útvarov s hranicou v trojuholníkoch ABC a DEF [a) A(–j; 0; 0), B(4j; 5j; 4j), C(–4j; 4j; 5j), D(4j; 0; j), E(–4j; 3j; 3j), F(0; 6j; O); b) A(–2j; j; j), B(0; 4j; 5j), C(3j; 2j; 2j), D(–2j; 3j; 4j), E(3j; 0; 5j), F(0; 5j; 0); c) A(–4j; 1,5j; j), B(4j; 2,5j; j), C(–j; 7j; 5j), D(–5,5j; 4,5j; 2,5j), E(5j; 6j; 0), F(0; 0; 6j)].

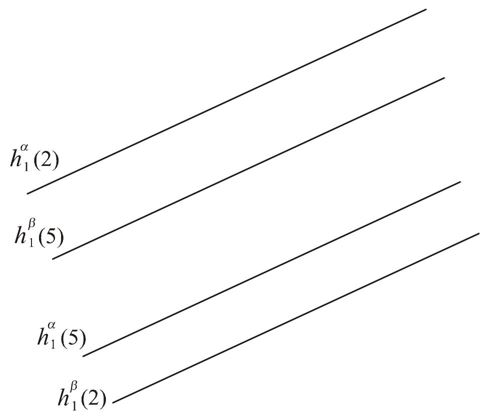
26. Zostrojte prienik rovinného útvaru (s hranicou v rovnobežníku $ABCD$) s rovinným pásom určeným priamkami a, b ($a \parallel b \parallel \pi$, $z^a = 10$j, $z^b = 4$j). (Obr. 12)

27. Určite vzájomnú polohu priamky $p = \overleftrightarrow{MN}$ s rovinou rovnobežníka $ABCD$. Ak je priamka s touto rovinou rôznobežná, zostrojte ich spoločný bod. (Obr. 13)

28. Určite vzájomnú polohu rovín α, β; v prípade rôznobežnosti zostrojte ich priesečnicu. (Obr. 14)

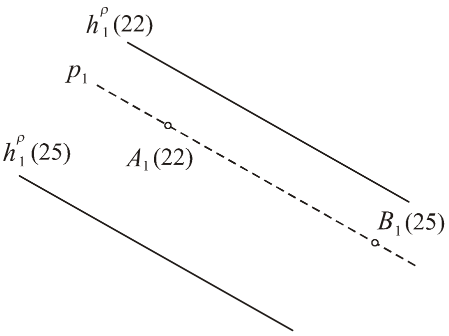


Obr. 13

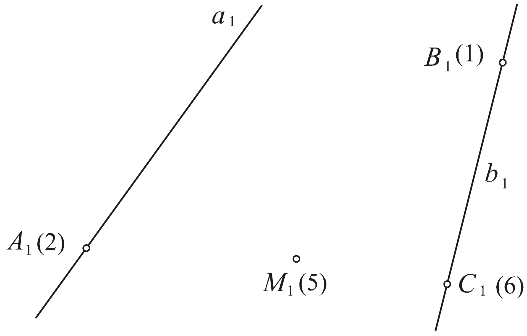


Obr. 14

29. Určite vzájomnú polohu priamky $p = \overleftrightarrow{AB}$ s rovinou ρ. V prípade rôznobežnosti zostrojte ich spoločný bod a vyznačte viditeľnú polpriamku priamky p vzhľadom na danú rovinu. (Zvoľte si $p_1 \parallel h_1^\rho$.) (Obr. 15)



Obr. 15

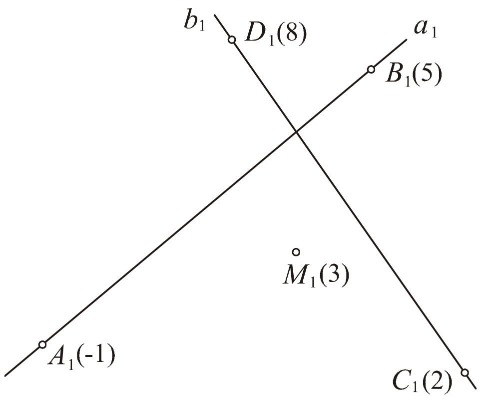


Obr. 16

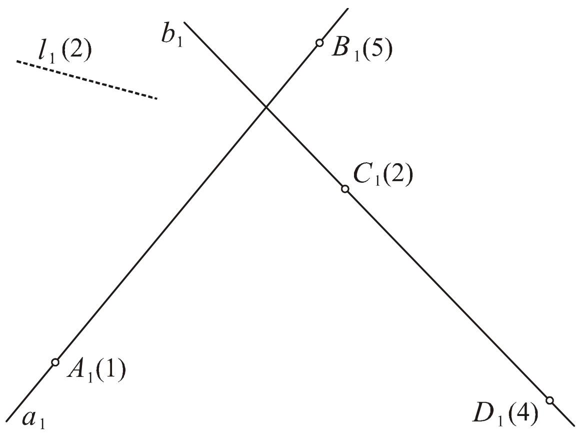
30. Určite vzájomnú polohu priamky $m = \overleftrightarrow{HK}$ s pravidelným päťbokým ihlanom s podstavou v priemetni a výškou v. V prípade existencie zostrojte prienik priamky s telesom. (Polomer kružnice opísanej podstave telesa sa rovná 5j, v = 12j. H_1, K_1, sú stredy ľubovoľných dvoch nesusedných podstavných hrán telesa a z^H = 2j, z^K = 5j.)

31. Zobrazte priečku mimobežných priamok a, b prechádzajúcu bodom M. Bod A leží na priamke a, priamka a je rovnobežná s priemetňou a $b = \overleftrightarrow{BC}$. (Obr. 16)

32. Riešte predchádzajúcu úlohu pre a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ (obr. 17); b) $a \perp \pi$ (priamku a, body C, D ($b = \overleftrightarrow{CD}$) a bod M si zvoľte ľubovoľne tak, aby a, b boli mimobežky a bod M neležal na žiadnej z nich.

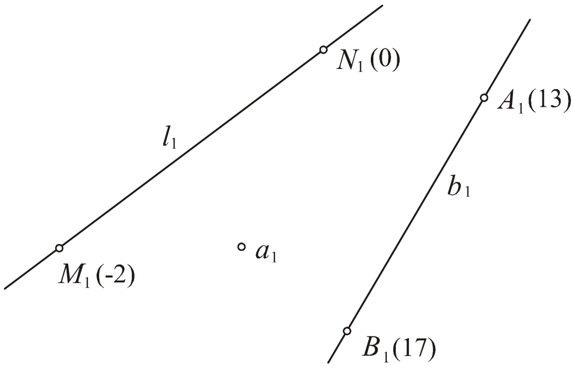


Obr. 17



Obr. 18

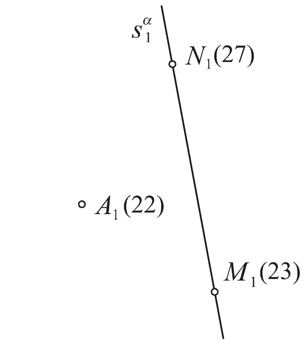
33. Zobrazte priečku mimobežných priamok $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ rovnobežnú s priamkou l ($l \parallel \pi$). (Obr. 18)



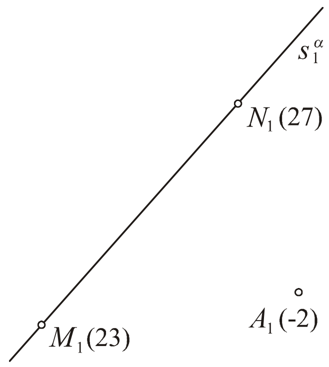
Obr. 19

34. Riešte predchádzajúcu úlohu pre: $a \perp \pi$, $b = \overleftrightarrow{AB}$, $l = \overleftrightarrow{MN}$ (obr. 19).

35. Zobrazte priamku *k* kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom *A*. Rovina α je určená spádovou priamkou $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$. V prípade a) zostrojte i bod súmerne združený s bodom *M* podľa roviny α. (Obr. 20 a, b)

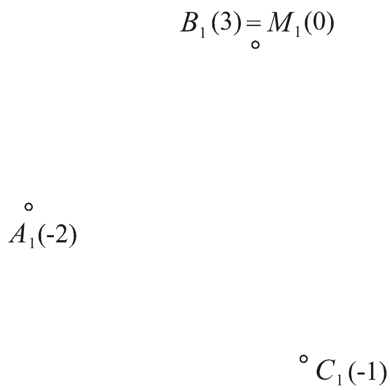


Obr. 20a

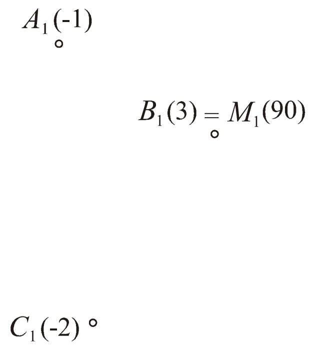


Obr. 20b

36. Zostrojte priamku *k*, ktorá prechádza bodom *M* a je kolmá na rovinu trojuholníka *ABC*. V prípade dostupnej päty kolmice vyznačte i viditeľnú polpriamku priamky *k* vzhľadom na rovinu *ABC*. (Obr. 21 a, b)

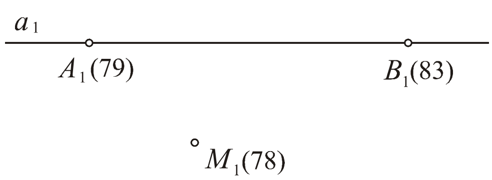


Obr. 21a



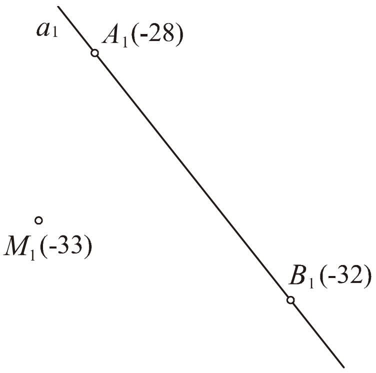
Obr. 21b

37. Zostrojte: a) rovinu prechádzajúcu bodom *M* a kolmú na priamku $a = \overleftrightarrow{AB}$; b) priamku prechádzajúcu bodom *M*, kolmú na priamku *a* a rôznobežnú s priamkou *a*; c) bod súmerne združený s bodom *M* podľa priamky *a*. (Obr. 22)

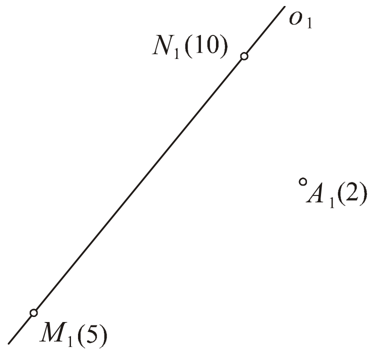


Obr. 22

38. Zostrojte vzdialenosť bodu *M* od priamky *AB*. Riešte úlohu a) pomocou otočenia roviny $\overleftrightarrow{aM}$; b) pomocou roviny α ($M \in \alpha$, $\alpha \perp a$). (Obr. 23)



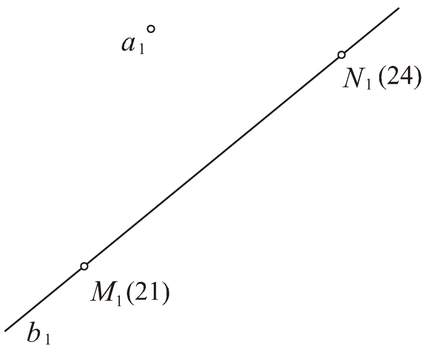
Obr. 23



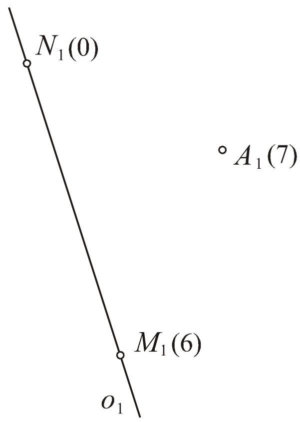
Obr. 24

39. Zobrazte rovnostranný rotačný kužeľ osou súmernosti $o = \overleftrightarrow{MN}$ a bodom A jeho hrany k. (Obr. 24)

40. Zostrojte os mimobežných priamok a, b. Priamka a je kolmá na priemetňu, $b = \overleftrightarrow{MN}$ (obr. 25).

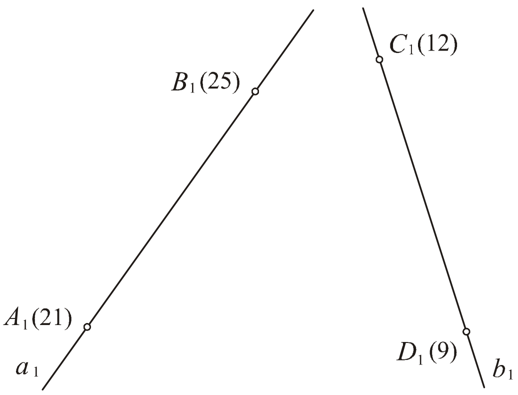


Obr. 25

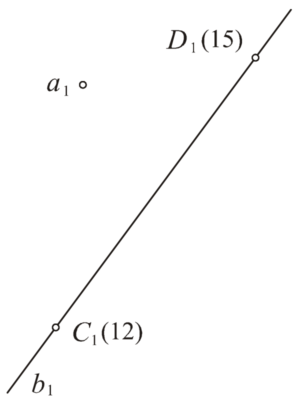


Obr. 26

41. Zobrazte pravidelný päťboký ihlan s osou $o = \overleftrightarrow{MN}$, vrcholom A podstavy a výškou $v = 8$j. (Obr. 26)



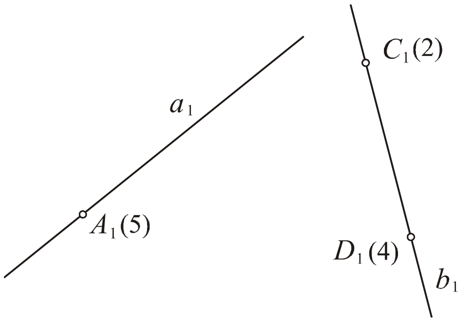
Obr. 27a



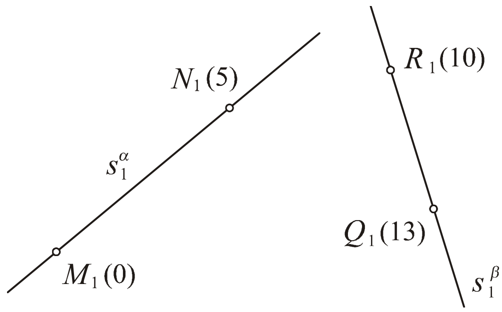
Obr. 27b

42. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok a, b, ak: a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$; b) $a \perp \pi$, $b = \overleftrightarrow{CD}$; **c)** $a \parallel \pi$, $A \in a$, $b = \overleftrightarrow{CD}$. (Obr. 27 a, b, c)

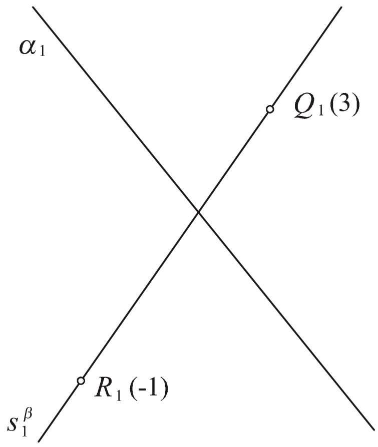
43. Zostrojte uhol zhodný s uhlom rovín α, β daných spádovými priamkami, ak: a) $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{RQ}$; b) $\alpha \perp \pi$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{RQ}$; c) ${}^{\alpha}s_1 \parallel {}^{\beta}s_1$, $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{AB}$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{CD}$. (Obr. 28 a, b, c)



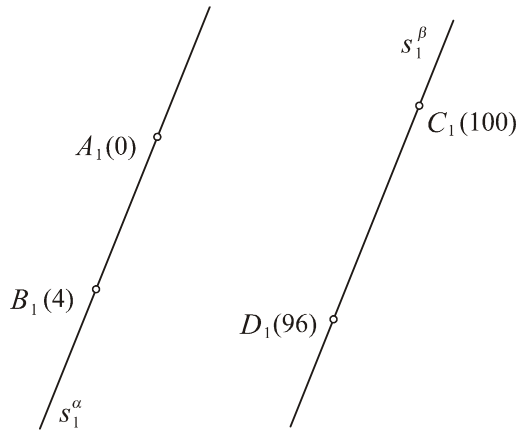
Obr. 27c



Obr. 28a

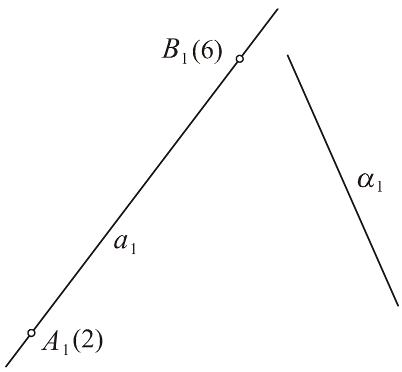


Obr. 28b

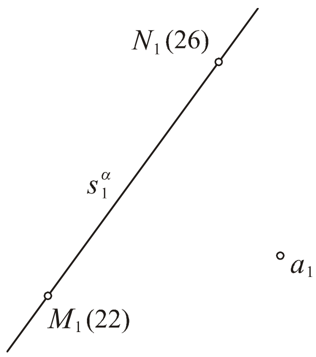


Obr. 28c

44. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamky a s rovinou α, ak: a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $\alpha \perp \pi$; b) $a \perp \pi$, rovina α je určená spádovou priamkou $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$. (Obr. 29 a, b)



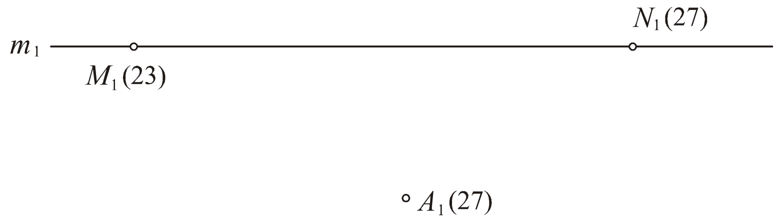
Obr. 29a



Obr. 29b

45. Nech a je priamka, α rovina a s^{α} jej spádová priamka. Môže nastať prípad, v ktorom uhol priamky a s rovinou α je zhodný s uhlom priamok a, s^{α}? Sformulujte tvrdenie a dokážte.

46. Zobrazte kocku s jednou hranou na priamke $m = {}^{\leftrightarrow}MN$ a nesusedným vrcholom v bode A. Vyberte riešenie, pre ktoré je bod A vrcholom kocky s najmenšou kótou. (Obr. 30)



Obr. 30

47. Zostrojte priamku m ležiacu v rovine α a prechádzajúcu bodom C tak, aby: a) $s_m = 1/3$, b) $s_m = 2$. (Rovina α je daná bodmi A, B, C; $|A_1B_1| = 6\,j$, $|B_1C_1| = 5\,j$, $|C_1A_1| = 4\,j$, $z^A = 2$j, $z^B = 5$j, $z^C =$ j; s_m je označenie spádu priamky m.)

48. Zobrazte rovinu α prechádzajúcu priamkou $a = {}^{\leftrightarrow}AB$ tak, aby sa jej spád rovnal: a) 2, b) ½. (Zvoľte si $|A_1B_1| = 5$j, $z^A = 23$j, $z^B = 29$j.)

Konštrukcia základných telies z daných prvkov v kótovanom zobrazení

1. Zostrojte pravidelný štvorboký hranol s podstavou $ABCD$ v rovine α, ak je daný vrchol A telesa, stred S tejto podstavy a výška v hranola. [α(6j; 5j; 4j), A(0; 3j; ?), S(–3j; 4j; ?), $|v| = 7$j]

2. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný stred S tejto podstavy, jeden vrchol A a hlavný vrchol V telesa leží v rovine ν ($x \subset \nu$, $\nu \perp \pi$). [α(–6j; 4,5j; 6j), S(0; 2,5j; ?), A(–2,5j; 2j; ?)]

3. Zostrojte rotačný valec, ktorého podstava leží v rovine α, ak je daný stred S tejto podstavy, jej polomer r a výška v telesa. [α(–6j; 7j; 5j), S(0; 3j; ?), $|r| = 3,5$j, $|v| = 8$j]

4. Zostrojte kocku, v ktorej uhlopriečka BD steny $ABCD$ leží na priamke $m = {}^{\leftrightarrow}PM$. [$A$(–2j; 6j; j), P(5j; j; 0), M(–6j; 5j; 5,5j)]

5. Zostrojte kocku so stenou $ABCD$, ktorej vrchol C leží v priemetni π. [A(1,5j; 3j; 3j), B(–1,5j; j; 1,5j)]

6. Zostrojte kocku so stenou $ABCD$ v rovine α, ak je daný vrchol B' protiľahlej steny a vrchol A leží v priemetni π (pri štandardnom označení vrcholov telesa). [α(8j; 5j; 6,5j), B'(2,5j; 8j; 5,5j), $x^A \leq x^B$]

7. Zostrojte pravidelný štvorboký ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný stred podstavy S, jeden jej vrchol A a výška v telesa. [α(∞; 5,5j; 7,5j), S(0; ?; 4j), A(– 2,5j; ?; 2,5j), $|v| = 7$j]

8. Zostrojte pravidelný šesťboký hranol s jednou podstavou v rovine α, ak je daný stred S tejto podstavy a vrchol A' druhej podstavy. [α(7j; 8j; 6j), S(0; ?; 3j), A'(4j; 5j; 4j)]

9. Zostrojte pravidelný päťboký (šesťboký) ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný vrchol A podstavy a hlavný vrchol V telesa. [α(–6j; 6j; 7j), A(j; j; ?), V(–2,5j; 8j; 8j)] ([α(–6j; 8j; 9j), A(4j; 8j; ?), V(–4j; 8j; 8j)])

10. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan s podstavou v rovine α, ktorého jedna stena leží v priemetni π. Bod S je stredom podstavy telesa. [α(–8j; 9j; 7j), S(0; ?; 4j)]

11. Zostrojte pravidelný štvorboký ihlan s podstavou $ABCD$ v rovine α, hlavným vrcholom V a bodom M jednej jeho bočnej hrany. [α(6j; 8j; 9j), V(4j; 8j; 8j), M(0; 8j; 7j)]

12. Zostrojte pravidelný štvorsten $ABCD$, ktorého jedna hrana leží na priamke $m = \overleftrightarrow{KL}$. [$A$(0; 5j; j), K(3j; 0; 7j), L(7j; 8j; 4j)]

13. Zostrojte pravidelný šesťboký hranol (ihlan), ak priamka $o = \overleftrightarrow{KL}$ je osou telesa, bod A vrcholom jednej podstavy a v dĺžka jeho výšky. [K(–8j; 8j; 0), L(0; 4j; 8j), A(–3,5j; 3j; 2j), v = 8j]

14. Zostrojte rotačný valec s osou $o = \overleftrightarrow{KU}$, bodom M jednej podstavnej kružnice a výškou v. [K(–j; 6j; 8j), U(5j; j; 3j), M(0; 1,5j; 3j), $|v|$ = 8j]

15. Zostrojte kocku, pre ktorú je priamka $o = \overleftrightarrow{UV}$ osou súmernosti (incidentnou so stredmi protiľahlých stien) a bod A jeden jej vrchol. [U(–4j; j; 0), V(2j; 9j; 9j), A(–5j; 4j; 4j)]

16. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan so stredom S podstavy, hlavným vrcholom V a podstavnou hranou AB v priemetni π. [S(1,5j; 3,5j; 2j), V(–3j; 7j; 6,5j)]

Poznámka. Ďalšie aplikačné cvičenia a príklady čitateľ môže nájsť o. i. v diplomovej práci RNDr. Jána Bakšu, PhD., „*Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*“, MFF UK Bratislava 1998, kapitola *Kótované zobrazenie*.

Literatúra

[1] Klenková, P.: *Stereometria – Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru*. Diplomová práca, 2006, s. 120. Univerzita Komenského v Bratislave, FMFI UK, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. In: Internetová stránka Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky MFF UK, oddelenie geometrie a počítačovej grafiky, Univerzita Komenského Bratislava.

[2] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody* (*I.diel, II. diel*). Promítání rovnoběžné. 1991, vydanie prvé, s. 460. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN: 80-04-21778-8

[3] Lászlová K.: *Osvetlenie základných geometrických telies*. Diplomová práca, 2000, s. 91. Univerzita Komenského v Bratislave, FMFI UK, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky.

[4] Sklenáriková, Z. – Pémová, M.: *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami* (učebný text a cvičenia), 2008, s. 24. In: Internetová stránka Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky MFF, oddelenie geometrie a počítačovej grafiky, Univerzita Komenského Bratislava

[5] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Učebný text, 2002, 2005 (1. vyd., 2. vyd.), s. 220. Bratislava: Vydavateľstvo Univerzity Komenského, ISBN 80-223-1585-0

[6] Urban, A.: *Deskriptivní gepmetrie I*. 1965, 1. vydanie, s. 368. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.