

DOTYČNICE, DOTYKOVÝ KUŽEL

- 16.** V $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ nájdite priamky, ktoré prechádzajú bodom $(0, 0)$ a dotýkajú sa kubiky $y^2 - x(x^2 + 7x + 1)$. Načrtnite krivku aj s dotyčnicami.
- 17.** Ukážte, že kubika $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 3xy + 1$ má nad $\mathbb{R}$ jediný singulárny bod, a nájdite jej dotyčnice v tomto bode.
- 18.** Nájdite dotyčnice krivky v jej singulárnych bodoch:
- (a) $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - y^2(3 + 2y)$
 (b) $f(x, y) = x^2(3y - 2x^2) - y^2(1 - y)^2$
- Akého typu sú nájdene singularity?
- 19.** Pokúste sa načrtnúť krivku v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$$2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4.$$

Pomôžte si dotyčnicami v singulárnych bodoch. Prípadne skúste tiež nájsť body s vodorovnými či zvislými dotyčnicami.

- 20.** Do rovnobežníka s vrcholmi

$$(-3, -1), \quad (1, -1), \quad (3, 1) \quad \text{a} \quad (-1, 1)$$

vpíšte elipsu (t.j. nájdite rovnicu elipsy vpísanej do rovnobežníka). (Pomôcka: použite afinnú transformáciu, ktorá rovnobežník zobrazí na štvorec, vyriešte úlohu, transformujte riešenie naspäť.)

- 21.** Nech P je dvojnásobný bod krivky P . Ukážte, že P je nód (čiže f má v P dve rôzne dotyčnice) práve vtedy, keď

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(P) \frac{\partial f}{\partial y}(P).$$

- 22.** Ukážte, že ak krivka f stupňa d obsahuje d -násobný bod, tak potom pozostáva z d priamok (nie nutne rôznych).

PROJEKTÍVNY PRIESTOR

- 23.** Vypracujte Príklad 3.3 z prednášky: napíšte bijekciu medzi jednotkovým diskom v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ na jednej strane a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ na druhej strane.