

## SINGULÁRNE BODY ROVINNEJ KRIVKY

- 11.** Dokážte Tvrdenie 2.15 z prednášky (vlastnosti derivácie).
- 12.** *Astroida*  $f = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$  má štyri reálne singularity:  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ . Zvoľte si jednu z nich.
- (a) Vypočítajte všetky parciálne derivácie  $f$  vo zvolenej singularite. Aká je násobnosť tohto bodu na krivke?
  - (b) Nájdite Taylorov rozvoj  $f$  vo zvolenej singularite.
  - (c) Nájdite rovnicu krivky, ktorá vznikne takým posunutím  $f$ , ktoré zobrazí zvolenú singularitu do  $(0, 0)$ . Porovnajte s (b).
- 13.** Ukážte, že nasledovné krivky majú nad  $\mathbb{R}$  iba jeden singulárny bod:
- (a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$  (*Descartov list*)
  - (b)  $f(x, y) = x^6 - x^2y^3 - y^5$
  - (c)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - y(3x^2 - y^2)$  (*trojlístok*)
  - (d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$  (*štvorlístok*)
  - (e)  $f(x, y) = x^2y^2 + 36x + 24y + 108$
  - (f)  $f(x, y) = y^3 + x^2 + 2xy - 6y^2 - 2x + 14y - 11$
- Aká je v jednotlivých prípadoch násobnosť singulárneho bodu?
- 14.** Nech  $\varphi(x)$  je polynóm nad  $k$  stupňa aspoň 3. Ukážte, že každý singulárny bod krivky v  $\mathbb{A}^2(k)$  s rovnicou  $f(x, y) = y^2 - \varphi(x)$  leží na  $x$ -osi. Následne ukážte, že  $f = y^2 - (5 - x^2)(4x^4 - 20x^2 + 25)$  má nad  $\mathbb{R}$  dva singulárne body.
- 15.** Uvažujme krivku  $f = xy(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \in \mathbb{R}[x, y]$  (tzv. *maltézsky kríž*).
- (a) Nájdite jej singulárne body. Pri hľadaní Vám môže pomôcť malý trik: uvažujte funkciu  $g = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ .
  - (b) Pomocou priesečníkov s priamkami cez  $(0, 0)$  sa pokúste krivku načrtnúť.