

6. LINEÁRNE SYSTÉMY KRIVIEK

6.1. Priestor rovinných kriviek. Pripomeňme, že n -rozmerný projektívny priestor nad poľom k je množina jednorozmerných podpriestorov vektorového priestoru k^{n+1} .

Bod Q v $\mathbb{P}^n$ tak zodpovedá jednorozmernému vektorovému podpriestoru V . Nenulový vektor $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ v podpriestore V potom určuje homogénne súradnice $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ bodu Q . Rôzne vektory podpriestoru V určujú rôzne homogénne súradnice toho istého bodu Q .

Všeobecnejšie, $(d+1)$ -rozmerný podpriestor k^{n+1} zodpovedá d -rozmernému podpriestoru (t.j. d -rozmernej lineárnej variete) v $\mathbb{P}^n$.

Lema 6.1. *Krivky v $\mathbb{P}^2(k)$ stupňa d tvoria projektívny priestor nad k stupňa $\frac{1}{2}d(d+3)$*

Dôkaz. Nech $m_0, m_1, \dots, m_D$ sú všetky monómy stupňa n v premenných z_0, z_1 a z_2 . Nech $F = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_Dm_D$ je krivka v $\mathbb{P}^2$ stupňa d . Pre ľubovoľné nenulové λ je potom $\lambda a_0m_0 + \lambda a_1m_1 + \dots + \lambda a_Dm_D$ tá istá krivka. Koefficienty $(a_0 : a_1 : \dots : a_D)$ teda predstavujú homogénne súradnice bodu v D -rozmernom projektívnom priestore. Ostáva ešte určiť dimenziu tohto priestoru. Tá bude o 1 menšia než počet monómov v z_0, z_1 a z_2 stupňa d , čo je rovné kombinačnému číslu $\binom{d+2}{2}$, a teda hľadaná dimenzia je

$$D = \binom{d+2}{2} - 1 = \frac{(d+1)(d+2) - 2}{2} = \frac{d(d+3)}{2}.$$

□

Príklad 6.2. Priamky v $\mathbb{P}^2$ tvoria dvojrozmerný projektívny priestor, tzv. *duálnu rovinu*: priamka $a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2$ reprezentuje v duálnej rovine bod s homogénnymi súradnicami $(a_0 : a_1 : a_2)$.

Príklad 6.3. Kužeľosečka $a_{00}z_0^2 + a_{01}z_0z_1 + a_{11}z_1^2 + a_{02}z_0z_2 + a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$ reprezentuje bod $(a_{00} : a_{01} : a_{11} : a_{02} : a_{12} : a_{22})$ 5-rozmerného projektívneho priestoru; množina všetkých rovinných kužeľosečiek tvorí $\mathbb{P}^5$.

6.2. Zväzok kriviek. Nech $A = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, $B = (b_0 : b_1 : \dots : b_n)$ sú body projektívneho priestoru $\mathbb{P}^n$. Priamka cez A, B je množina

$$\overleftrightarrow{AB} = \{\lambda A + \mu B \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Ak A, B reprezentujú krivky v projektívnej rovine, potom body priamky $\overleftrightarrow{AB}$ reprezentujú tzv. *zväzok kriviek*.

Príklad 6.4. Nech

$$A = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 \quad \text{a} \quad B = b_0z_0 + b_1z_1 + b_2z_2$$

sú rôzne priamky pretínajúce sa v bode $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, t.j.

$$a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 = 0, \quad b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2 = 0.$$

Ich lineárna kombinácia (t.j. v duálnej rovine bod na priamke $\overleftrightarrow{AB}$) je zjavne tiež priamka prechádzajúca bodom P . Naopak, ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom P leží v duálnej rovine na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ (vyplýva z poznatkov lineárnej algebry o množine riešení sústavy homogénnych lineárnych rovníc).

Lema 6.5. *Nech $\lambda F + \mu G$ je zväzok kriviek v projektívnej rovine. Nech $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ sú dve rôzne krivky tohto zväzku. Potom $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ majú tie isté spoločné body ako F a G .*

Dôkaz. Keďže $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ patria zväzku $\lambda F + \mu G$, ľahko overíme, že spoločné body kriviek F a G ležia aj na krivkách $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$. Z faktu, že $\tilde{F}$ a $\tilde{G}$ určujú ten istý zväzok ako F a G potom už vyplýva tvrdenie lemy. $\square$

Príklad 6.6. Bez toho, aby sme museli prevádzať náročné výpočty vieme už ľahko určiť, z akých kriviek pozostáva zväzok určený dvoma kružnicami pretínajúcimi sa v dvoch bodoch, napr.

$$\begin{aligned} F &= x^2 + y^2 - 1 \\ G &= (x - 1)^2 + y^2 - 2. \end{aligned}$$

Budú to kružnice (lebo ide o kvadratické krivky prechádzajúce kružnicovými bodmi $(0 : 1 : i)$, $(0 : 1 : -i)$) prechádzajúce bodmi $(0, 1)$ a $(0, -1)$.

Príklad 6.7. (Hľadanie prieniku dvoch kuželosečiek.) Nech F a G sú kuželosečky v $\mathbb{P}^2$ pretínajúce sa v štyroch bodoch vo všeobecnej polohe. Každú kuželosečku vo zväzku $\lambda F + \mu G$ môžeme reprezentovať symetrickou maticou. Kuželosečka bude singulárna (t.j. pozostávajúca z dvojice priamok) práve vtedy, keď zodpovedajúca matica je singulárna, čiže jej determinant je nulový. Determinant matice kuželosečky $\lambda F + \mu G$ je kubická forma v premenných λ a μ . Zväzok $\lambda F + \mu G$ teda obsahuje tri singulárne kuželosečky: naozaj, existujú tri dvojice priamok prechádzajúce danými štyrmi bodmi.

Príklad 6.8. V Príklade 4.3 sme videli, že sústredné kružnice sa pretínajú len v kružnicových bodoch. Skúsme sa teraz na túto situáciu pozrieť z hľadiska zväzkov kriviek.

Nech $x^2 + y^2 - r^2$ a $x^2 + y^2 - s^2$ sú dve rôzne kružnice so stredom v $(0, 0)$. Zväzok kružníc nimi určený obsahuje dve singulárne kuželosečky: dvojásobnú nevlastnú priamku a dvojicu komplexne združených priamok cez $(0, 0)$. Odtiaľ zas vidíme, že tieto kuželosečky majú len dva spoločné body: $(0 : 1 : i)$ a $(0 : 1 : -i)$.

Príklad 6.9. Množina všetkých kuželosečiek v $\mathbb{P}^2$ prechádzajúcich bodmi

$$(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1) \text{ a } (1 : 1 : 1)$$

tvorí zväzok. Naozaj, ak kuželosečka obsahuje dané body, tak je daná formou

$$az_0z_1 + bz_0z_2 + cz_1z_2, \quad \text{kde} \quad a + b + c = 0.$$

Teda ak položíme $c = -a - b$, dostávame, že ide o zväzok určený dvojicou

$$z_1(z_0 - z_2) \text{ a } z_2(z_0 - z_1).$$

Dôsledok 6.10. *Pre ľubovoľnú generickú štvoricu bodov v $\mathbb{P}^2$ (t.j. takú štvoricu, že žiadne tri body neležia na priamke) je množina všetkých kuželosečiek prechádzajúcich cez tieto body zväzkom.*

Dôkaz. Existuje presne jedna projektívna transformácia $\mathbb{P}^2$, ktorá danú generickú štvoricu bodov zobrazí na štvoricu v Príklade 6.9. Táto transformácia hľadaný systém kuželosečiek bijektívne zobrazí na zväzok v Príklade 6.9. $\square$

Tvrdenie 6.11. *Nech $\lambda F + \mu G$ je zväzok kriviek a nech P je ľubovoľný bod v $\mathbb{P}^2$. Potom v zväzku $\lambda F + \mu G$ existuje aspoň jedna krivka prechádzajúca bodom P .*

Dôkaz. Nech $\lambda F + \mu G$ je zväzok kriviek stupňa d . Uvažujme teraz všetky krivky stupňa d prechádzajúce bodom P . Tieto tvoria v priestore $\mathbb{P}^D$ ($D = d(d+3)/2$) nadrovinu, teda projektivizáciu D -rozmerného vektorového priestoru V v k^{D+1} . Zväzok $\lambda F + \mu G$ v priestore k^{D+1} zodpovedá dvojrozmernému podpriestoru W . Z lineárnej algebry vieme,

že buď $W \subset V$ alebo je prienikom V a W jednorozmerný podpriestor. Prienik je v každom prípade neprázdny a zodpovedá krivke (krivkám) ktoré jednak prechádzajú bodom P a tiež ležia vo zväzku $\lambda F + \mu G$. $\square$

Príklad 6.12. Steinerove kubiky tvoria zväzok určený dvojicou

$$z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 \quad \text{a} \quad z_0 z_1 z_2.$$

Všetky krivky zväzku prechádzajú deviatimi inflexnými bodmi nesesingulárnych kriviek zväzku. Platí to aj naopak: kubická krivka prechádzajúca všetkými deviatimi inflexnými bodmi (viď časť 5.1) je nevyhnutne Steinerovou kubikou:

Všeobecne rovnica kubickej krivky je

$$\sum_{i+j+k=3} a_{ijk} z_0^i z_1^j z_2^k.$$

Uvažujme najprv trojicu

$$P_{00} = (0 : -1 : 1), \quad P_{01} = (0 : \alpha : 1), \quad P_{02} = (0 : \alpha^2 : 1),$$

kde $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Ak krivka prechádza týmito tromi bodmi, potom koeficienty a_{ijk} musia spĺňať rovnice

$$\begin{aligned} a_{003} - a_{012} + a_{021} - a_{030} &= 0 \\ a_{003} + \alpha a_{012} + \alpha^2 a_{021} - a_{030} &= 0 \\ a_{003} + \alpha^2 a_{012} - \alpha a_{021} + a_{030} &= 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ už ľahko dostaneme, že $a_{012} = a_{021} = 0$ a $a_{003} = a_{030}$. Uvažovaním ďalších trojíc inflexných bodov nájdeme analogické podmienky pre ostatné koeficienty okrem a_{111} . Odtiaľ už dostávame, že krivka je zo zväzku Steinerových kubík.

Takže analogicky ako v predchádzajúcom príklade máme, že množina kriviek prechádzajúcich cez uvažovanú deväťicu bodov tvorí zväzok.